PHẦN I: MỞ ĐẦU

Trong những năm gần đây việc kiểm tra đánh giá năng lực học sinh có sự thay đổi, nên đòi hỏi học sinh không những nắm vững kiến thức cơ bản mà còn biết vận dụng kiến thức đó để giải quyết các bài toán liên quan.

Trong quá trình giảng dạy, bồi dưỡng học sinh khá và trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi của các trường trên THPT trên toàn quốc có đưa ra những bài tập về nhị thức Niu-Tơn và những vấn đề liên quan đến khai triển nhi thức Niu-Tơn. Phần đa các em học sinh gặp những dạng toán này thì các em lúng túng không biết giải các bài toán này như thế nào, đơn cử qua hai ví dụ sau

Ví dụ 1: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(1+x+3x^2\right)^{10}$.

Ví dụ 2: Cho khai triển: $\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{2010}\right)^{2011}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{4042110}x^{4042110}$.

a. Tính tổng $a_0+a_2+a_4+...+a_{4042110}$.

b. Chứng minh đẳng thức sau:

$$C_{2011}^{0}a_{2011}-C_{2011}^{1}a_{2010}+C_{2011}^{2}a_{2009}-C_{2011}^{3}a_{2008}+...+C_{2011}^{2010}a_1-C_{2011}^{2011}a_0=-2011.$$

+ Qua hai ví dụ ta thấy nếu học sinh không nắm vững kiến thức, tính chất và hệ quả của nhị thức Niu - Tơn thì dẫn đến học sinh gặp khó khăn và lúng túng không biết hướng giải bài toán này như thế nào.

- Để khắc phục những khó khăn trên cho học sinh, tôi chọn đề tài **Nhị Thức Niu-Tơn và Phương Pháp Chứng Minh Đẳng Thức Có Chứa Công Thức Tổ Hợp Chập k của n**, để giúp học sinh có kiến thức và kỹ năng để giải các bài toán dạng này.

PHẦN II: NỘI DUNG

2.1. Kiến thức vận dụng.

Trong bài viết này ta quy ước n, k là các số nguyên dương với $1 \le k \le n$.

Cho một tập hợp X gồm n phần tử.

2.2. Hoán vị

Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của tập X tạo thành một hoán vị. Số hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$.

2.3. Chỉnh hợp

Mỗi cách sắp k phần tử thứ tự của tập X tạo thành một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số chỉnh hợp như thế là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

2.4. Tổ hợp

Mỗi cách sắp k phần tử không phân biệt thứ tự của tập X tạo thành một tổ hợp chập k của n phần tử. Số tổ hợp như thế là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2.5. Công thức nhị thức Niu-Tơn

Ta có $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Quy ước rằng $P_0 = 0! = 1$ và $A_n^0 = C_n^0 = 1$.

+ $2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + .. + C_n^n$.

+ $0 = C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^k C_n^k + .. + (-1)^n C_n^n$.

+ $C_n^k = C_n^{n-k}$.

+ $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

$x^\alpha . x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. $\quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha.\beta}$. $\quad (x.y)^\alpha = x^\alpha . y^\alpha$. $\quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.

2.6. Một Số dạng toán thường gặp

Dạng 1: Tính hệ số của đa thức

Bài 1: Tìm số hạng không chứa x, khi khai triển $P(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ biết rằng n thỏa mãn hệ thức $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=2C_{n+2}^8$.

Phân tích

+ Với bài toán này thì học sinh gặp khó khăn vì không biết giá trị của n bằng bao nhiêu để tính.

+ Từ đẳng thức đề cho ta phải tìm được giá trị n, để tìm giá trị của n đòi hỏi các em phải biết khai thác các tính chất và hệ quả của nhị thức Niu – Tơn.

Lời giải

Ta có $C_n^6+3C_n^7+3C_n^8+C_n^9=C_n^6+C_n^7+2\left(C_n^7+C_n^8\right)+C_n^8+C_n^9$

$=C_{n+1}^7+2C_{n+1}^8+C_{n+1}^9=C_{n+2}^8+C_{n+2}^9=C_{n+3}^9$.

Vậy giả thiết tương đương với $C_{n+3}^9=2C_{n+2}^8\Leftrightarrow\dfrac{n+3}{9}=2\Leftrightarrow n=15$.

Khi đó $P(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k2^kx^{\frac{30-5k}{6}}$.

Số hạng không chứa x tương ứng với $\dfrac{30-5k}{6}=0\Leftrightarrow k=6$.

Vậy số hạng cần tìm là $C_{15}^6.2^6=320320$.

Bài 2: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(1+x+3x^2\right)^{10}$.

Phân tích

Ta thấy học sinh sẽ gặp khó khăn không biết hướng giải bài toán này như thế nào?

Nhưng ta thấy nếu xem số 1 là một hạng tử và $x+3x^2$ là một hạng tử thì bài toán trở về bài toán khai triển nhị thức Niu – Tơn ngay.

Lời giải

Ta có $\left(1+x+3x^2\right)^{10}=\left(1+\left(x+3x^2\right)\right)^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k.1^k.\left(x+3x^2\right)^{10-k}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(\sum\limits_{i=0}^{10-k}C_{10-k}^ix^i\left(3x^2\right)^{10-k-i}\right)$

$$=\sum_{k=0}^{10}\sum_{i=0}^{10-k}C_{10}^kC_{10-k}^i3^{10-k-i}x^{20-2k-i}.$$

Ta có hệ số của x^4 khi $\begin{cases}20-2k-i=4\\0\le i\le k\le 10,\left(i,k\in\mathbb{N}\right)\\i+k\le 10\end{cases}\Leftrightarrow i=16-2k$.

Khi đó ta chọn được $k=6\Rightarrow i=4$; $k=7\Rightarrow i=2$ và $k=8\Rightarrow i=0$.

Vậy hệ số của x^4 là $3^2.C_{10}^8.C_2^0+3.C_{10}^7.C_3^2+3^0.C_{10}^6.C_4^4=1695$.

Củng cố.

+ Để tính hệ số của số hạng x^{α} (α là một số hữu tỉ cho trước) trong khai triển nhị thức Niu-Tơn của $P(x)=\left(f(x)\right)^{n}$, ta làm như sau:

Viết $P(x)=\sum a_k x^{g(k)}$; số hạng chứa x^{α} tương ứng với $g(k)=\alpha$; giải phương trình ta tìm được k. Nếu $k\in\mathbb{N}, k\le n$, hệ số phải tìm là a_k; nếu $k\notin\mathbb{N}$ hoặc $k>n$, thì trong khai triển không có số hạng chứa x^{α}, hệ số phải tìm bằng 0.

+ Hoặc $P(x)=\left(a+bx^{\alpha}+cx^{\beta}\right)^{n}$ thì ta có thể phân tích biểu thức $P(x)$ như sau:

$$P(x)=\left(a+\left(bx^{\alpha}+cx^{\beta}\right)\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0} a^{k}b^{i}c^{n-k-i}C_n^kC_{n-k}^{i}x^{(n-k-i)\beta+\alpha i}.$$

Khi đó ta có hệ số của x^{t} khi $\begin{cases}(n-k-i)\beta+\alpha i=t\\ 0\le i\le k\le n,(i,k,n\in\mathbb{N})\\ i+k\le n\end{cases}$.

$$P(x)=\left(cx^{\beta}+\left(a+bx\alpha\right)\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}C_n^kC_k^ia^{k-i}c^{n-k}b^{i}x^{\beta n-\beta k+\alpha i}.$$

Khi đó ta có hệ số của x^{t} khi $\begin{cases}n\beta-\beta k+\alpha i=t\\ 0\le i\le k\le n,(i,k,n\in\mathbb{N})\end{cases}$.

Bài 3: Xác định hệ số của x^{11} trong khai triển đa thức $\left(x^2+2\right)^{n}\left(3x^3+1\right)^{n}$ biết $C_{2n}^{2n}-3C_{2n}^{2n-1}+...+(-1)^{k}3^{k}C_{2n}^{2n-k}+...+3^{2n}C_{2n}^{0}=1024$.

Phân tích

+ Để giải bài toán này ta cần tìm được giá trị của tham số n, vậy để tìm giá trị của n ta cần khai thác giả thiết $C_{2n}^{2n}-3C_{2n}^{2n-1}+...+(-1)^{k}3^{k}C_{2n}^{2n-k}+...+3^{2n}C_{2n}^{0}=1024$.

+ Từ đẳng thức $C_{2n}^{2n}-3C_{2n}^{2n-1}+...+(-1)^{k}3^{k}C_{2n}^{2n-k}+...+3^{2n}C_{2n}^{0}=1024$ giúp ta nhớ tới khai triển nhị thức $(1-x)^{2n}$ và chọn giá trị x thích hợp thì ta tìm được giá trị của n.

Lời giải

Ta có $(1-x)^{2n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}+...+(-1)^{k}C_{2n}^{k}x^{k}+...+(-1)^{2n}C_{2n}^{2n}x^{2n}$

$$=C_{2n}^{2n}-C_{2n}^{2n-1}x+C_{2n}^{2n-2}x^{2}+...+(-1)^{k}C_{2n}^{2n-k}x^{k}+...+\left((-1)^{2}\right)^{n}C_{2n}^{0}x^{2n}$$

$$=C_{2n}^{2n}-C_{2n}^{2n-1}x+C_{2n}^{2n-2}x^{2}+...+(-1)^{k}C_{2n}^{2n-k}x^{k}+...+C_{2n}^{0}x^{2n}.$$

Chọn $x=3$ ta có $(-2)^{2n}=C_{2n}^{2n}-3C_{2n}^{2n-1}+3^{2}C_{2n}^{2n-2}+...+(-1)^{k}3^{k}C_{2n}^{2n-k}+...+3^{2n}C_{2n}^{0}=1024$

$$\Leftrightarrow(-2)^{2n}=(-2)^{10}\Leftrightarrow n=5.$$

Với $n=5$

Ta có $\left(x^2+2\right)^5\left(3x^3+1\right)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^k x^{2k}2^{5-k}\sum_{i=0}^{5}C_5^i 3^1 x^{3i}=\sum_{k=0}^{5}\sum_{i=0}^{5}C_5^k.2^{5-k}.C_5^i.3^1.x^{2k+3i}$.

Ta có hệ số của x^{11} khi và chỉ khi $\begin{cases}2k+3i=11\\0\le k\le 5\\0\le i\le 5\\i,k\in\mathbb{N}\end{cases}$, $(*)$.

Khi đó cặp số $(i;k)$ thỏa mãn $(*)$ là: $(1;4)$ và $(3;1)$.

Vậy hệ số của x^{11} là $C_5^4.C_5^1.3.2+C_5^1.C_5^3.3^3.2^4=21750$.

Củng cố.

Xét đẳng thức $(x+1)^n(x+1)^m=(x+1)^{n+m}$.

Tương tự trên sử dụng công thức khai triển nhị thức Niu-Tơn để viết cả hai vế thành đa thức đối với x, đồng nhất hệ số của các số hạng cùng bậc trong hai vế, ta có thể viết ra được nhiều hệ thức về tổ hợp.

Bài 4: Tìm hệ số có giá trị lớn nhất của đa thức $P(x)=(2x+1)^{13}=a_0x^{13}+a_1x^{12}+...+a_{13}$.

Lời giải

Ta có $P(x)=(2x+1)^{13}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^k(2x)^{13-k}$.

Vậy $a_k=C_{13}^k 2^{13-k}\Rightarrow a_{k-1}=C_{13}^{k-1}2^{14-k},(k=1;2;...;13)$

Xét bất phương trình (với ẩn số k)

$$a_{k-1}\le a_k\Leftrightarrow C_{13}^{k-1}2^{14-k}\le C_{13}^k 2^{13-k}\Leftrightarrow \frac{2}{14-k}\le\frac{1}{k}\Leftrightarrow k\le\frac{14}{3}\notin\mathbb{N}.$$

Do đó bất đẳng thức $a_{k-1}\le a_k$ đúng với $k\in\{1;2;3;4\}$ và dấu đẳng thức không xảy ra.

Khi đó ta có $a_0<a_1<a_2<a_3<a_4$ và $a_4>a_5>...>a_{13}$.

Vậy hệ số có giá trị lớn nhất là $a_4=C_{13}^4 2^9=366080$.

Củng cố. Để tìm hệ số có giá trị lớn nhất khi khai triển $(ax+b)^n$ thành một đa thức, ta làm như sau:

Tính hệ số của số hạng tổng quát, giải bất phương trình $a_{k-1}\le a_k$ với ẩn số k; hệ số có giá trị lớn nhất phải tìm tương ứng với số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn bất phương trình trên.

Dạng 2: Bài toán tính tổng .

Bài 5: Tính tổng $S=C_n^k.C_m^0+C_n^{k-1}.C_m^1+...+C_n^{k-m}.C_m^m$, (với $k,m,n\in\mathbb{Z}$ và $0<m,n;0\le k\le\min\{m;n\}$).

Phân tích

Ta thấy tổng các chập k của tích các tổ hợp trên đều bằng nhau $k+0=(k-1)+1=...=(k-m)+m=k$ thì ta nghĩ ngay tới hệ số của x^k trong khai triển nhị thứ Niu – Tơn. Trong đó ta thấy $C_n^k.C_m^0$ chính là tích các hệ số x^k và x^0 của hai khai triển nhị thức Niu – Tơn .

Lời giải

Ta có

$(1+x)^m=C_m^0+C_m^1x^1+C_m^2x^2+...+C_m^kx^k+...+C_m^mx^m$.

$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^kx^k+...+C_n^nx^n$.

Suy ra

$(1+x)^m.(1+x)^n=\left(C_m^0+C_m^1x^1+C_m^2x^2+...+C_m^kx^k+...+C_m^mx^m\right).\left(C_n^0+C^1x^1+C_n^2x^2+...+C_n^kx^k+...+C_n^nx^n\right)$

$=P(x)+\left(C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+...+C_m^kC_n^0\right)$, (Trong đó $P(x)$ là đa thức không chứa x^k).

Mặt khác $(1+x)^{m+n}=C_{m+n}^0+C_{m+n}^1x+...+C_{m+n}^kx^k+...+C_{m+n}^{m+n}x^{m+n}$.

Vì $(1+x)^m.(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ nên ta có hệ số x^k của hai vế bằng nhau nên ta có

$C_n^k.C_m^0+C_n^{k-1}.C_m^1+...+C_n^{k-m}.C_m^m=C_{m+n}^k$.

Chú ý:

+ Khi chứng minh các đẳng thức mà có tích của hai tổ hợp thì ta nghĩ tới tích khai triển của hai nhị thức Niu – tơn, sau đó tùy vào yêu cầu bài toán ta đồng nhất hệ số của x^k.

+ Đặc biệt khi $n=m=k$ ta có $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+...+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$.

Bài 6: Với n là số nguyên dương, tính tổng $S=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+kC_n^k+...+nC_n^n$.

Cách 1:

Phân tích

ta có công thức $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.

Chứng minh công thức $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.

Ta có $kC_n^k=k\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n.\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=nC_{n-1}^{k-1}$.

Lời giải

Ta có $S=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+...+kC_n^k+...+nC_n^n=nC_{n-1}^0+nC_{n-1}^1+nC_{n-1}^2+...+nC_{n-1}^{k-1}+...+nC_{n-1}^{n-1}$

$=n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+...+C_{n-1}^{k-1}+...+C_{n-1}^{n-1}\right)=n.2^{n-1}$.

Vậy $S=n.2^{n-1}$.

Tổng quát: Ta có $S=C_n^1+2.x.C_n^2+3.x^2.C_n^3+...+k.x^{k-1}.C_n^k+...+n.x^{n-1}.C_n^n=n(1+x)^{n-1}$.

Cách 2:

Phân tích

Ta thấy các hệ số của các tổ hợp trong tổng S tăng dần, nên khi sử dụng khai triển nhị thức Niu-Tơn $(a+bx)^n$ ta thay giá trị tương ứng cho a,b thì không được kết quả thuận lợi, nhưng từ khai triển nhị thức Niu-Tơn $(a+bx)^n$ ta đạo hàm hai vế của khai triển và ta thay giá trị tương ứng cho a,b thì ta được kết quả cho bài toán.

Lời giải

Từ khai triển biểu thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x + ... + C_n^n x^n$ sau đó lấy đạo hàm hai vế ta có $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1}$.

Chọn $x=1$ ta có $n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n$.

Nhận xét:

Qua hai cách làm trên ta thấy cách hai làm ngắn gọn hơn cách 1, làm cách 1 đòi hỏi học sinh phải thành thạo cách biến đổi các công thức tổ hợp, tuy nhiên nếu học sinh chưa học đạo hàm thì ta cũng có cách giải quyết bài toán.

Bài 7: Với n là số nguyên dương, tính tổng

$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3.x + 3.4.C_n^4.x^2 + ... + (k-1).k.C_n^k.x^{k-2} + ... + (n-1)nC_n^n.x^{n-2}, \forall n \ge 3$.

Lời giải

Cách 1

Phân tích

Ta có $(k-1).k.C_n^k = k.(k-1).\dfrac{n(n-1).(n-2)!}{k.(k-1).(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$.

Lời giải

$$S = n(n-1)C_{n-2}^0 + n(n-1)C_{n-2}^1.x + n(n-1)C_{n-2}^2.x^2 + ... + n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.x^{k-2} + ... + n(n-1)C_{n-2}^{n-2}.x^{n-2}$$
$$= n(n-1)\left(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1.x + C_{n-2}^2.x^2 + ... + C_{n-2}^{k-2}.x^{k-2} + ... + C_{n-2}^{n-2}.x^{n-2}\right) = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

Cách 2

Từ khai triển biểu thức $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x + ... + C_n^n x^n$ sau đó lấy đạo hàm hai vế ta có $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + nC_n^n x^{n-1}$, sau đó ta đạo hàm hai vế một lần nưa ta có $n(n-1)(1+x)^{n-2} = 1.2C_n^2 + 2.3C_n^3 x ... + n(n-1)C_n^n x^{n-2}$.

Chọn $x=1$ ta có $n(n-1)2^{n-2} = 1.2C_n^2 + ... + n(n-1)C_n^n$.

Củng cố. Ta có thể tính các tổng

$S_1 = C_n^0 + 2.aC_n^1 + 3.a^2C_n^2 + ... + (n+1)a^nC_n^n$.

$S_2 = C_{2n}^0 + 3a^2C_{2n}^2 + 5a^4C_{2n}^4 + ... + (2n+1)a^{2n}C_{2n}^{2n}$.

$S_3 = 2aC_{2n}^1 + 4a^3C_{2n}^3 + 6a^5C_{2n}^5 + ... + 2na^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}$.

Khi xét đa thức $P(x) = x(1+x)^n$ và chứng tỏ rằng $S_1 = P'(a)$.

Xét đa thức $Q(x) = x(1+x)^{2n}$ và chứng tỏ rằng $2S_2 = Q'(a) + Q'(-a)$; $2S_3 = Q'(a) - Q'(-a)$.

Dạng 3: Chứng minh hệ thức về công thức tổ hợp.

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + ... + C_n^n = 3^n$.

Phân tích

+ Ta thấy đẳng thức $2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + ... + C_n^n = 3^n$ có dạng giống như tổng các hệ số trong khai triển nhị thức Niu – Tơn.

Lời giải

Ta có $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^{n-2} x^{n-2} + ... + C_n^n$.

Chọn $x = 2$ ta có $3^n = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + ... + C_n^n$. (đpcm)

Tổng quát: Khi gặp dạng toán mà trong biểu thức có chứa $\sum_{k=0}^{n} a^k C_n^k$, (với a là hằng số) thì ta nghĩ ngay tới khai triển $(1 \pm x)^n$, sau đó ta chọn giá trị x thích hợp.

Bài 9: Chứng minh rằng $C_{2n}^0 + 3^2.C_{2n}^2 + 3^4.C_{2n}^4 + ... + 3^{2n}.C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$.

Phân tích

Ta thấy C_{2n}^k mà giá trị k là những số chẵn. Vậy làm cách nào để xuất hiện tổng các C_{2n}^k với k là những số chẵn?

Ta có

$(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^{n-2} x^{n-2} + ... + C_n^n, \quad (1)$

$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + (-1)^n C_n^n x^n, \quad (2)$

Khi đó cộng vế theo vế của (1) và (2) thì ta có tổng các C_{2n}^k với k là những số chẵn, còn trừ vế theo vế của (1) và (2) thì ta có tổng các C_{2n}^k với k là những số lẻ.

Lời giải

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}, \quad (*)$; $(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}, \quad (**)$.

Cộng vế theo vế của $(*)$ và $(**)$ ta có $(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 x^2 + ... + C_{2n}^{2n} x^{2n}\right)$.

Chọn $x = 3$ ta có $4^{2n} + (-2)^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + ... + 3^{2n} C_{2n}^{2n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{4^{2n} + (-2)^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + ... + 3^{2n} C_{2n}^{2n} \Leftrightarrow \frac{4^{2n} + (2)^{2n}}{2} = C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + ... + 3^{2n} C_{2n}^{2n}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right) = C_{2n}^0 + 3^2 C_{2n}^2 + ... + 3^{2n} C_{2n}^{2n}.$$

Dạng 4: Phương trình chứa công thức tổ hợp

Bài 10: Giải phương trình $A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$.

Phương trình đã cho có dạng

$$\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!} - \frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!} = 3x^2 + 6! + 159$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + x(x+1) - \frac{3}{2}(x-1)(x-2) = 3x^2 + 879$$

$$\Leftrightarrow (x-12)\left(2x^2 + 11x + 147\right) = 0 \Leftrightarrow x = 12.$$

Củng cố. Khi giải phương trình chứa công thức tổ hợp ta làm như sau:
Đặt điều kiện cho ẩn số; sử dụng các công thức về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp để biến đổi, rút gọn phương trình; đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện của bài toán để kết luận.

2.4. Sáng tác một số bất đẳng thức từ công thức nhị thức Niu-Tơn

Muốn có một bài toán về bất đẳng thức ta chỉ cần lấy bất kì một hằng đẳng thức nào đó, rồi bớt (hoặc thêm) một số hạng dương nào đó ở một vế thì sẽ được một bài toán về bất đẳng thức. Nhưng để được một bài toán về bất đẳng thức đúng và hay còn đòi hỏi vào khả năng say mê tìm tòi của chúng ta. Sau đây là một số ví dụ về các bài toán bất đẳng thức quen thuộc được rút ra từ nhị thức Niu-Tơn.

Ví dụ 1: Từ công thức $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$ cho $a=1$ ta được

$(1+b)^n = 1 + nb + \dfrac{n(n-1)}{2}b^2 + \ldots + nb^{n-1} + b^n \quad (1)$. Nếu b là một số không âm thì $n+1$ số hạng ở vế phải của (1) đều là những số không âm. Do đó có thể bỏ đi bất kì một số các số hạng nào đó ở vế phải ta được vế trái không nhỏ hơn vế phải, chẳng hạng:

$$(1+b)^n \geq 1 + nb$$

$$(1+b)^n \geq 1 + nb + \frac{(n-1)n}{2}b^2$$

$$(1+b)^n \geq 1 + nb^{n-1} + b^n, \ldots$$

Ví dụ 2: Từ công thức $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$ ta chọn $b = \dfrac{1}{n}, (n>1)$ thì ta có

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + \frac{1}{n}C_n^1 + \frac{1}{n^2}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n^n}C_n^n.$$

Mà ta có $C_n^k \dfrac{1}{n^k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{n!}{(n-k)!n^k}\right) < \dfrac{1}{k!}$ nên ta có $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

Một Số Bài Tập Vận Dụng

Câu 1: Với n là số nguyên dương, tính tổng $S=C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+...+k^2.C_n^k+...+n^2.C_n^n$.

Lời giải

Ta có $k^2C_n^k=\left[k(k-1)+k\right]C_n^k=k(k-1)C_n^k+kC_n^k=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}$.

Vậy $S=C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+...+k^2.C_n^k+...+n^2.C_n^n$

$$=nC_{n-1}^0+\left(n(n-1)C_{n-2}^0+nC_{n-1}^1\right)+\left(n(n-1)C_{n-2}^1+nC_{n-1}^2\right)+...+\left(n(n-1)C_{n-2}^{n-2}+nC_{n-1}^{n-1}\right)$$

$$=n(n-1)\left(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+...+C_{n-2}^{n-2}\right)+n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+...+C_{n-1}^{n-1}\right)$$

$$=n(n-1).2^{n-2}+n.2^{n-1}=n(n+1).2^{n-2}.$$

Câu 2: Chứng minh rằng $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!\left((n+1)-(k+1)\right)!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$.

Vậy $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^1+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^2+...+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

$$=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+...+C_{n+1}^{n+1}-C_{n+1}^0\right)=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).$$

Câu 3: Tính tổng $S=\frac{1}{2}C_n^1+\frac{2}{3}C_n^2+...+\frac{n}{n+1}C_n^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có $\frac{k}{k+1}C_n^k=\left(1-\frac{1}{k+1}\right)C_n^k=C_n^k-\frac{1}{k+1}C_n^k=C_n^k-\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$.

Hay $S=\frac{1}{2}C_n^1+\frac{2}{3}C_n^2+...+\frac{n}{n+1}C_n^n=\left(C_n^1-\frac{1}{n+1}C_{n+1}^2\right)+\left(C_n^2-\frac{1}{n+1}C_{n+1}^3\right)+...+\left(C_n^n-\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)$

$$=\left(C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n-C_n^0\right)-\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+...+C_{n+1}^{n+1}-C_{n+1}^0-C_{n+1}^1\right)$$

$$=2^n-1-\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-(n+1)-1\right)=\frac{(n-1)2^n+1}{n+1}.$$

Câu 4: Tìm hệ số x^6 trong khai triển $\left(x^2-x-1\right)^n$ thành đa thức. Trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn: $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

Lời giải

Ta có

$$(1+1)^{2n+1}=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n+C_{2n+1}^{n+1}+C_{2n+1}^{n+2}...+C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$=C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n+C_{2n+1}^n+...+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^0$$

$$=2\left(C_{2n+1}^0+C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n\right)=2\left(C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n\right)+2$$

$$=2\left(2^{20}-1\right)+2.$$

Hay ta có $2^{2n+1}=2^{21}\Leftrightarrow n=10$.

Với $n=10$

Ta có $\left(x^2-x-1\right)^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}\sum\limits_{i=0}^{10-k}C_{10}^kC_{10-k}^i\left(-1\right)^{10-k}.\left(1\right)^{10-k-i}x^{2k-i}$.

Vậy hệ số của x^6 khi và chỉ khi $\begin{cases}2k-i=6\\0\le i\le k\le 10,\left(i,k\in\mathbb{N}\right)\\i+k\le 10\end{cases}\quad\left(*\right)$.

Khi đó cặp số $\left(i;k\right)$ thỏa mãn $\left(*\right)$ là $\left(0;3\right)$; $\left(2;4\right)$; $\left(4;5\right)$.

Vậy hệ số của x^6 là $-C_{10}^3C_7^0+C_{10}^4C_6^2-C_{10}^5C_5^4=1770$.

Câu 5: Cho k là số tự nhiên. Chứng minh rằng $C_5^0.C_{2011}^k+C_5^1.C_{2011}^{k-1}+...+C_5^5.C_{2011}^{k-5}=C_{2016}^k$.

Lời giải

Ta có :

$(1+x)^5(1+x)^{2011}=(1+x)^{2016}$

Đặt $M=(1+x)^5=C_5^0+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5$.

$N=(1+x)^{2011}=C_{2011}^0+C_{2011}^1x+C_{2011}^2x^2+...+C_{2011}^kx^k+...+C_{2011}^{2011}x^{2011}$.

$P=(1+x)^{2016}=C_{2016}^0+C_{2016}^1x+C_{2016}^2x^2+...+C_{2016}^kx^k+...+C_{2016}^{2016}x^{2011}$.

mà $P=M.N$ nên phần tử thứ k trong P có dạng:

$C_{2016}^kx^k=C_5^0C_{2011}^kx^k+C_5^1xC_{2011}^{k-1}x^{k-1}+...+C_5^5x^5C_{2011}^{k-5}x^{k-5}=C_5^0C_{2011}^kx^k+C_5^1C_{2011}^{k-1}x^k+...+C_5^5C_{2011}^{k-5}x^k$.

Chọn $x=1$ ta có điều phải chứng minh.

Câu 6: Cho khai triển: $\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{2010}\right)^{2011}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{4042110}x^{4042110}$.

a. Tính tổng $a_0+a_2+a_4+...+a_{4042110}$.

b. Chứng minh đẳng thức sau:

$C_{2011}^0a_{2011}-C_{2011}^1a_{2010}+C_{2011}^2a_{2009}-C_{2011}^3a_{2008}+...+C_{2011}^{2010}a_1-C_{2011}^{2011}a_0=-2011$.

Hướng dẫn giải

a./ Từ khai triển trên lần lượt cho $x=-1;x=1$ ta được

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_2+...+a_{4042110}=2011^{2011}\\a_0-a_1+a_2-...+a_{4042110}=1\end{cases}$$

Cộng từng vế hai đẳng thức trên và chia cả hai vế cho 2 ta được

$$A=a_0+a_2+a_4+...+a_{4042110}=\frac{2011^{2011}+1}{2}.$$

b./ Xét $x\ne 1$ từ khai triển trên ta có:

$\left(1-x^{2011}\right)^{2011}=\left(1-x\right)^{2011}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4042110}x^{4042110}\right)$.

Hệ số của x^{2011} trong vế trái bằng $-C_{2011}^1=-2011$.

Hệ số của x^{2011} trong vế phải bằng

$C_{2011}^{0}a_{2011}-C_{2011}^{1}a_{2010}+C_{2011}^{2}a_{2009}-C_{2011}^{3}a_{2008}+...+C_{2011}^{2010}a_1-C_{2011}^{2011}a_0$

Từ đó ta có đẳng thức

$C_{2011}^{0}a_{2011}-C_{2011}^{1}a_{2010}+C_{2011}^{2}a_{2009}-C_{2011}^{3}a_{2008}+...+C_{2011}^{2010}a_1-C_{2011}^{2011}a_0=-2011.$

Câu 7: Cho khai triển: $\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{2017}\right)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{4070306}x^{4070306}$.

a. Tính tổng $a_0+a_2+a_4+...+a_{4070306}$.

b. Chứng minh đẳng thức sau

$C_{2018}^{0}a_{2018}-C_{2018}^{1}a_{2017}+C_{2018}^{2}a_{2016}-C_{2018}^{3}a_{2017}+...-C_{2018}^{2017}a_1+C_{2018}^{2018}a_0=-2018.$

Câu 8: Tính giá trị của biểu thức: $C=2009^{2006}.C_{2008}^{1}+2009^{2004}.C_{2008}^{3}+...+2009^{2}.C_{2008}^{2005}+C_{2008}^{2007}$.

Lời giải

Áp dụng công thức nhị thức **Niutơn** ta có:

$(x+1)^{2008}=x^{2008}C_{2008}^{0}+x^{2007}C_{2008}^{1}+x^{2006}C_{2008}^{2}+x^{2005}C_{2008}^{3}+...+xC_{2008}^{2007}+C_{2008}^{2008}$,

$(x-1)^{2008}=x^{2008}C_{2008}^{0}-x^{2007}C_{2008}^{1}+x^{2006}C_{2008}^{2}-x^{2005}C_{2008}^{3}+...-xC_{2008}^{2007}+C_{2008}^{2008}$.

Cộng vế theo vế và chọn $x=2009$ ta được

$$\frac{(2010)^{2008}-(2008)^{2008}}{2.2009}=2009^{2006}C_{2008}^{1}+2009^{2004}C_{2008}^{3}+...+2009^{2}C_{2008}^{2005}+C_{2008}^{2007}.$$

Vậy $C=\dfrac{(2010)^{2008}-(2008)^{2008}}{2.2009}$.

Câu 9: Cho khai triển: $\left(1+x+x^2+x^3+...+x^{10}\right)^{11}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_{110}x^{110}$.

Chứng minh đẳng thức sau:

$C_{11}^{0}a_0-C_{11}^{1}a_1+C_{11}^{2}a_2-C_{11}^{3}a_3+...+C_{11}^{10}a_{10}-C_{11}^{11}a_{11}=11$.

Câu 10: Tính tổng: $S=\dfrac{-C_n^1}{2.3}+\dfrac{2C_n^2}{3.4}-\dfrac{3C_n^3}{4.5}+...+\dfrac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{C_n^k}{k+1}=\dfrac{n!}{k!(k+1)(n-k)!}=\dfrac{1}{n+1}.\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!}=\dfrac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ (3)

Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: $\dfrac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{(-1)^k kC_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng vế các đẳng thức trên ta có

$(n+1)(n+2)S=-C_{n+2}^{3}+2C_{n+2}^{4}-3C_{n+2}^{5}+...+(-1)^n nC_{n+2}^{n+2}$

$$=-\left(C_{n+1}^2+C_{n+1}^3\right)+2\left(C_{n+1}^3+C_{n+1}^4\right)-3\left(C_{n+1}^4+C_{n+1}^5\right)+...+(-1)^n nC_{n+1}^{n+1}$$

$$=-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3-C_{n+1}^4+...+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}$$

$$=C_{n+1}^0-C_{n+1}^1-\left(C_{n+1}^0-C_{n+1}^1+C_{n+1}^2-C_{n+1}^3+C_{n+1}^4-C_{n+1}^5+...+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)=$$

$$1-(n+1)-(1-1)^{n-1}=-n$$

Vậy $S=\dfrac{-n}{(n+1)(n+2)}$.

Câu 11: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(1+x^2(1-x)\right)^8$. ĐS: 238

Câu 12: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển $\left(1+\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{10}$ với $x\neq 0$. ĐS: 3402

Câu 13: Tìm hệ số của x^2 trong khai triển $\left(1+\dfrac{1}{x}+x^3\right)^{10}$ với $x\neq 0$. ĐS: 90

Câu 14: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$ với $x\neq 0$. ĐS: 8085.

Câu 15: Gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n.(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$.

Câu 16: Xác định hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển $\left(x^3-3x^2+2\right)^n$. Biết $\dfrac{A_n^4}{A_{n+1}^3-C_n^{n-4}}=\dfrac{24}{23}$.

Câu 17: Tìm hệ số của x^{16} trong khai triển thành đa thức của $\left[1-x^2\left(1-x^2\right)\right]^{16}$. ĐS: 258570

PHẦN IV: TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Đề thi chọn học sinh giỏi của một số trường THPT trên toàn quốc.

[2]. Nhị Thức NiuTơn và Ứng Dụng – Đặng Thành Nam.

[3]. Chuyên Đề Nhị Thức NiuTơn – Lê Văn Đoàn.

PHẦN V: MỤC LỤC