Phần 1

ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong chương trình toán học THPT các bài toán liên quan đến dãy số là một phần quan trọng và luôn xuất hiện trong các **kì thi học sinh giỏi cấp Tỉnh**. Khi dạy **bồi dưỡng học sinh giỏi** chuyên đề này tôi nhận thấy học sinh thường gặp khó khăn trong vấn đề xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số, với lí do là trong chương trình SGK lớp 11 hiện nay chưa cung cấp được một công cụ đủ mạnh để giúp học sinh giải quyết được vấn đề này. Các tài liệu của các tác giả khác khi đề cập đến vấn đề này đều sử dụng kiến thức về phương trình sai phân là kiến thức của toán học cao cấp, do đó học sinh rất khó lĩnh hội, hoặc lĩnh hội một cách gượng ép, không tự nhiên, dẫn đến học sinh chán nãn, không hứng thú học phần này.

Với mong muốn cung cấp một công cụ gần gũi hơn cho học sinh, đề tài ***"Kỹ năng giải một số bài toán giới hạn dãy số trong các đề thi Học sinh giỏi Cấp Tỉnh"*** . Tác giả sẽ phân tích và đưa ra một phương pháp giải và kỹ năng để giải quyết được một phần nào đó vấn đề đặt ra, chỉ dựa trên những kiến thức cơ bản của toán lớp 11 mà không sử dụng toán học cao cấp. Đây cũng là đề tài và bài giảng mà tác giả đã dạy **Ôn thi học sinh giỏi lớp 11 và 12 của trường THPT Lê Lợi** trong quá trình giảng dạy phần dãy số và các ứng dụng của dãy số.

Tư tưởng chung của phương pháp là từ nội dung bài toán ban đầu ta tìm cách đưa hệ thức truy hồi về một hệ thức mới bằng cách đặt dãy phụ. Sử dụng các kiến thức cơ bản về cấp số cộng hoặc cấp số nhân để tìm số hạng tổng quát của dãy số mới từ đó suy ra số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

Giới hạn của đề tài chỉ dừng lại ở việc xác định công thức tổng quát của một số dãy số cho bởi hệ thức truy hồi, từ đó có áp dụng vào một số bài toán cụ thể. Qua đó, người đọc có thể trang bị thêm cho mình phương pháp xác định công thức tổng quát của dãy số và ứng dụng vào giải các bài toán liên quan. Ngoài ra qua đề tài này giáo viên cũng như học sinh có thể xây dựng các lớp bài toán về dãy số dưới dạng hệ thức truy hồi.

Đây là một dạng toán khó đối với học sinh của nhà trường nên trong đề tài này tôi trình bày theo thứ tự từ dễ đến khó theo logic, giúp học sinh tiếp cận một cách tự nhiên và dễ tiếp thu hơn. Qua đó giúp học sinh phát triển tư duy, hệ thống hóa các kiến thức một cách trình tự hợp lí.

Phần 2

NỘI DUNG

A. CƠ SỞ LÍ THUYẾT

I. DÃY SỐ.

1. Định nghĩa

a) Mỗi hàm số u xác định trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}^*$ được gọi là dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số)

$$\begin{aligned} u:\ &\mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ &n \mapsto u(n) \end{aligned}$$

Đặt $u(n) = u_n$ và gọi nó là số hạng tổng quát của dãy số $u(n)$.

b) Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1;2;3;\ldots;m\}$, với $m \in \mathbb{N}^*$, được gọi là dãy số hữu hạn.

2. Cách cho một dãy số.

a) Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát u_n.

Khi đó $u_n = f(n)$, trong đó f là một hàm số xác định trên $\mathbb{N}^*$.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 2n+1$. Khi đó nếu viết dãy số này dưới dạng khai triển ta được $3;5;7;9;\ldots;2n+1;\ldots$

b) Dãy số cho bằng phương pháp mô tả.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) với u_n là chữ số thứ n trong cách viết thập phân của số π, khi đó ta có dãy số: $u_1 = 3; u_2 = 1; u_3 = 4; u_5 = 5;\ldots$

trong trường hợp này ta không tìm được công thức biểu thị số hạng u_n qua n.

c) Dãy số cho bằng công thức truy hồi.

- Cho số hạng đầu u_1 *(hoặc một vài số hạng đầu)*

- Với $n \geq 2$, cho một công thức tính u_n nếu biết u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng trước nó). Các công thức có thể là: với

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = f(u_{n-1}) \ \ voi\ n \geq 2 \end{cases}$$

hoặc $$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}) \text{ voi } n \geq 3 \end{cases}$$

Ví dụ 3: cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \text{ voi } n \geq 3 \end{cases}$$

Dãy số này được gọi là dãy số Phibônaxi.

3. Tính chất của dãy số.

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq m$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại số M và m sao cho : $\forall n \in \mathbb{N}^*, m \leq u_n \leq M$.

Chú ý : - Dãy số (u_n) tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0, \forall n$.

- Dãy số (u_n) giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n$.

4. Giới hạn của dãy số.

a. Dãy số có giới hạn 0.

- Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 nếu với mọi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Khi đó ta viết : $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ *hoặc* $u_n \to 0$

- *Định lí 1:* Cho hai dãy số (u_n) và (v_n)

Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

- *Định lí 2:* Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

b. Dãy số có giới hạn hữu hạn.

- Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim(u_n - L) = 0$.

Khi đó ta viết : $\lim(u_n) = L$ hoặc $\lim u_n = L$ hoặc $u_n \to L$.

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

- *Định lí 3:* Giả sử $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là một hằng số. Khi đó :

$$\lim(u_n + v_n) = a + b; \qquad \lim(u_n - v_n) = a - b,$$

$$\lim(u_n.v_n) = a.b; \qquad \lim(cu_n) = c.a\ ; \quad \lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0\text{)}.$$

- *Định lí 4: (Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn)*

Cấp số nhân vô hạn $u_1; u_1q; u_1q^2; ...; u_1q^n; ...$ có công bội q với $|q| < 1$ gọi là một cấp số nhân lùi vô hạn.

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... + u_1q^n + ... = \frac{u_1}{1-q}.$$

c. Dãy số có giới hạn vô cực.

- $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \to +\infty$
- $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \to -\infty$

- *Định lí 5:* Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

5. Các tổng đặc biệt

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

II. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN.

1. Cấp số cộng

a. Định nghĩa: Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

(a, d là hai số thực cho trước) được gọi là cấp số cộng.

a là số hạng đầu tiên ; d là công sai.

Đặc biệt khi $d = 0$ thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau và gọi là dãy số không đổi.

b. Các tính chất:

Định lí 1: Ba số $u_n;u_{n+1};u_{n+2}$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng (u_n) nếu:

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+u_{n+2}\right).\ (1)$$

Định lí 2: Số hạng thứ n của cấp số cộng (u_n) được cho bởi công thức:

$$u_n=u_1+(n-1)d.\ (2)$$

Định lí 3: Tổng của n số hạng đầu tiên (kí hiệu là S_n) của cấp số cộng (u_n) :

$$S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n=\frac{n}{2}\left(u_1+u_n\right)=\frac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]\quad (3).$$

2. Cấp số nhân.

a. Định nghĩa:

Dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases}u_1=a\\ u_{n+1}=u_n.q,\forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

(a,q là hai số thực khác 0 cho trước) được gọi là cấp số nhân.

+ a là số hạng đầu tiên.

+ q là công bội.

Đặc biệt khi $q=1$ thì (u_n) là dãy số trong đó tất cả các số hạng đều bằng nhau và gọi là dãy số không đổi.

b. Các tính chất:

Định lí 1:

Ba số $u_n;u_{n+1};u_{n+2}$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân (u_n) nếu:

$$u_{n+1}^2=u_n.u_{n+2}.\ (4)$$

Định lí 2:

Số hạng thứ n của cấp số nhân (u_n) được cho bởi công thức: $u_n=u_1.q^{n-1}$. (5)

Định lí 3:

Tổng của n số hạng đầu tiên (kí hiệu là S_n) của cấp số nhân (u_n) được cho bởi công thức : $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n=u_1.\dfrac{q^n-1}{q-1}$. (6)

B. NỘI DUNG

Kỹ năng số 1. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ BẰNG CÁCH SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ BỊ CHẶN CỦA DÃY SỐ

1. Chứng minh một dãy số có giới hạn

Áp dụng định lý Weiestrass:

- Nếu dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên thì nó có giới hạn.

- Nếu dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới thì nó có giới hạn.

Chứng minh tính tăng (giảm) và tính bị chặn

Chứng minh một dãy số tăng và bị chặn trên (dãy số giảm và bị chặn dưới) bởi số M ta thực hiện: Tính một vài số hạng đầu tiên của dãy và quan sát mối liên hệ để dự đoán chiều tăng (chiều giảm) và tìm *số M.*

2. Tính giới hạn của dãy số ta thực hiện theo phương pháp sau

- Đặt $\lim u_{n+1} = a$.

- Từ $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n)$ ta được một phương trình theo ẩn a.

- Giải phương trình tìm nghiệm a và giới hạn của dãy (u_n) là một trong các nghiệm của phương trình. Nếu phương trình có nghiệm duy nhất thì đó chính là giới hạn của dãy cần tìm, còn nếu phương trình có nhiều hơn một nghiệm thì dựa vào tính chất của dãy số để loại nghiệm.

Chú ý: *Giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất.*

3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n); $(n = 1; 2; \ldots)$ được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{cases}$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

Phân tích

Dự đoán giới hạn của dãy số, bằng cách giải phương trình

$$a = \sqrt{a+12} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 = a + 12 \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

Nhận xét $u_1 = 5$

$u_2 = \sqrt{u_1 + 12} = \sqrt{17} < u_1$

$u_3 = \sqrt{u_2 + 12} = \sqrt{\sqrt{17} + 12} < u_2$ ...

Ta dự đoán dãy số (u_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 4 tức là $u_n \geq 4$

Chứng minh dãy số u_n bị chặn: tức là $u_n \geq 4$.

Lời giải chi tiết

Ta có $u_1 = 5$

$$u_2 = \sqrt{u_1 + 12} = \sqrt{17} < u_1$$

$$u_3 = \sqrt{u_2 + 12} = \sqrt{\sqrt{17} + 12} < u_2 \; \ldots$$

Ta dự đoán dãy số u_n là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 4 tức là $u_n \geq 4$

Chứng minh: Dãy số u_n bị chặn: tức là $u_n \geq 4$

Khi $n=1,\ u_1 = 5 \geq 4$. Vậy $n=1$ đúng.

Giả sử $u_k \geq 4$, ta chứng minh: $u_{k+1} \geq 4$

Thật vậy ta có

$u_{k+1} = \sqrt{u_k + 12} > 0 \Leftrightarrow u_{k+1}^2 = u_k + 12 \Leftrightarrow u_{k+1}^2 - 12 = u_k \geq 4 \Leftrightarrow u_{k+1}^2 \geq 16 \Rightarrow u_{k+1} \geq 4$

Vậy dãy số u_n bị chặn dưới.

Ta chứng minh dãy số u_n là dãy số giảm

Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 12} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 12}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 4)(u_n + 3)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n} \leq 0 \quad (\text{vì } u_n \geq 4).$$

Vậy dãy số u_n giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn.

Đặt $\lim u_n = a$ thì $\lim u_{n+1} = a$.

Ta có $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \Leftrightarrow \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{u_n + 12}$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{a + 12} \Rightarrow a = 4$

Vậy $\lim u_n = 4$.

Ví dụ 2. Cho dãy số x_n $, n \in \mathbb{N}$ được xác định như sau :

$$x_0 = 1;\ x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n^2 + 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \text{ Tính } \lim_{n \to +\infty} x_n.$$

[Trích đề HSG Kon Tum năm 2011-2012]

Phân tích

Nhận thấy $(x_n) \geq 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ nên dãy số đã cho bị chặn dưới. Do đó ta cần kiểm tra dãy số đã cho có giảm không? Nếu dãy số đã cho giảm thì theo tiêu chuẩn Weiestrass dãy số đã cho có giới hạn. Bằng cách qua giới hạn dãy số ta có thể tìm được giới hạn trên.

Lời giải chi tiết

Ta có $(x_n) \geq 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ bị chặn dưới.

Xét $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n}{x_n^2 + 1} - x_n = -\dfrac{x_n^3}{x_n^2 + 1} \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (x_n)$ là dãy giảm.

Suy ra dãy (x_n) có giới hạn.

Gọi l là giới hạn của dãy số, ta có $l \geq 0$

và qua giới hạn ta được $l = \dfrac{l}{l^2 + 1} \Leftrightarrow l = 0$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$

Kinh nghiệm :

Trong ví dụ trên ta nhận thấy dãy số đã cho giảm và bị chặn dưới nên ta chỉ cần làm như sau : Đặt $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n)$.

- Từ $\lim u_{n+1} = \lim f(u_n)$ ta được một phương trình theo ẩn *a*.

- *Giải phương trình tìm nghiệm a và giới hạn của dãy* (u_n) *là một trong các nghiệm của phương trình. Nếu phương trình có nghiệm duy nhất thì đó chính là giới hạn của dãy cần tìm, còn nếu phương trình có nhiều hơn một nghiệm thì dựa vào tính chất của dãy số để loại nghiệm.*

Nhận xét :

Trong trường hợp dãy số đã cho giảm nhưng không bị chặn dưới (dãy số tăng nhưng không bị chặn trên) ta làm như thế nào? Mời bạn đọc theo dõi ví dụ sau đây

<u>Ví dụ 3</u>. Cho dãy $(x_n): \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_{n+1} = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3}; n \geq 1, n \in N. \end{cases}$.

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

[Trích đề HSG Kon Tum năm 2009-2010]

Lời giải chi tiết

Chứng minh dãy (x_n) tăng và không bị chặn trên

Ta có $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$,

Xét $x_{n+1} - x_n = \sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} - x_n = \dfrac{8x_n^2 + 11x_n + 3}{\sqrt{9x_n^2 + 11x_n + 3} + x_n} > 0, \forall x_n > 0$

Giả sử $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a (a > 0) \Rightarrow a = \sqrt{9a^2 + 11a + 3}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = -\dfrac{3}{8} \text{ (không thỏa)} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

Do đó $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{9 + \dfrac{11}{x_n} + \dfrac{3}{x_n^2}} = 3$

Kinh nghiệm :

Trong trường hợp dãy số (x_n) *đã cho tăng nhưng không bị chặn trên ta có* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$. *Khi đó áp dụng định nghĩa, định lý về giới hạn dãy số để tính giới hạn.*

Ví dụ 4.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2021} + u_n, n \geq 1. \end{cases}$ Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \ldots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

[Trích đề HSG Quảng Ngãi năm 2020-2021]

Lời giải chi tiết

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2021} + u_n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{2021} \Rightarrow 2021(u_{n+1} - u_n) = u_n^2$

$$\Rightarrow 2021\frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}.u_n} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}.u_n} \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2021\cdot\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right).$$

Suy ra

$$\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \ldots + \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2021\cdot\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \ldots - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = 2021\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

Vì $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{2021} > 0, \forall n \in N^*$ nên (u_n) là dãy đơn điệu tăng.

Giả sử (u_n) bị chặn trên thế thì $\exists \lim u_n = a$.

Lấy giới hạn hai vế của biểu thức $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2021} + u_n$,

Ta có phương trình $a = \dfrac{a^2}{2021} + a$, suy ra $a = 0$ (vô lí vì $u_n \geq 1, \forall n$)

Do đó (u_n) không bị chặn trên tức $\lim u_n = +\infty$.

$$\lim\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \ldots + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \lim 2021\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = 2021.$$

Kỹ năng số 2. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ BẰNG CÁCH XÁC ĐỊNH SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ BẰNG CÁCH SỬ DỤNG KIẾN THỨC CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN.

Tìm số hạng tổng quát của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi.

Ta thấy việc xác định số hạng tổng quát của các dãy số đã cho là khá đơn giản khi áp dụng trực tiếp các kết quả đã có về cấp số cộng và cấp số nhân. Tuy nhiên thực tế các bài toán chúng ta gặp hầu hết đều không đơn giản như thế, chẳng hạn dãy số :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2 \ (*), \forall n \geq 2 \end{cases}.$$

Ở đây ta nhận thấy trong hệ thức truy hồi thì hệ số đi kèm u_{n-1} khác 1 do đó nó không phải là cấp số cộng, đồng thời hệ số đi kèm khác 0 nên nó không là cấp số nhân đơn thuần.

Khi đó ta làm thế nào để xác định số hạng tổng quát của dãy số đã cho? Sau đây ta sẽ nghiên cứu cách tìm số hạng tổng quát của dãy số trên.

Ví dụ 1. Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2 \quad (*), \forall n \geq 2 \end{cases}.$$

✓ ***Phân tích***

Với bài toán này thì công việc không còn đơn giản, vì dãy số đã cho không phải là cấp số cộng hay cấp số nhân, ta sẽ giải bài toán này với tư tưởng cố gắng đưa dãy số đã cho về dạng một cấp số nhân vì "có dấu hiệu của CSN là: $3u_{n-1}$*"*

Lời giải chi tiết

Gọi (v_n) là một dãy số sao *cho* $u_n = v_n - 1$ (1). Suy ra $v_1 = 3$

và từ hệ thức truy hồi $(*)$ ta có :

$$v_n - 1 = 3(v_{n-1} - 1) + 2 \Leftrightarrow v_n = 3.v_{n-1}$$

Như vậy (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = 3$ và công bội $q = 3$,

nên ta có số hạng tổng quát $v_n = 3.3^{n-1} = 3^n$

Thay vào (1) ta có $u_n = 3^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

❖ ***Kinh nghiệm*****:**

Mấu chốt của cách làm trên là ta đặt $u_n = v_n - 1$*, và thay vào hệ thức truy hồi của* (u_n) *ta dễ dàng suy ra* (v_n) *là một cấp số nhân. Từ đó suy ra kết quả bài toán.*

Vậy câu hỏi đặt ra là :"Tại sao lại đặt $u_n = v_n - 1$*"; "con số* -1 *từ đâu mà có ";"sao không lấy số khác mà phải lấy số* -1*"...*

Quay lại ví dụ trên ta thấy nếu không có số 2 *trong hệ thức truy hồi* $u_n = 3u_{n-1} + 2$ *thì dãy số đã cho là một cấp số nhân, do đó việc xác định số hạng tổng quát của dãy số này là đơn giản. Vì vậy ta tìm cách loại bỏ số* 2 *để đưa dãy số đã cho trở thành một dãy số mới và là một cấp số nhân , bằng cách đặt* $u_n = v_n + c$*, thay vào hệ thức truy hồi* $(*)$ *ta có* $v_n = 3v_{n-1} + 2c + 2$*.*

Ta chọn c *sao cho* $2c + 2 = 0$ *suy ra* $c = -1$*. Do đó mà ta có cách đặt như trên .*

❖ ***Tổng quát :***

Với cách làm như trên ta xác định được số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho bởi

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = au_{n-1} + b, \forall n \ge 2 \end{cases}.$$

- Nếu $a = 1$ thì (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = b$, nên ta có $u_n = \alpha + (n-1)b$.

- Nếu $a \neq 1$, ta gọi (v_n) là dãy số có các số hạng thỏa mãn $u_n = v_n + c$, thay vào hệ thức truy hồi ta có $v_n = av_{n-1} + (a-1)c + b$.

+ Ta chọn c sao cho $(a-1)c + b = 0$ hay $c = \dfrac{b}{1-a}$

+ Khi đó (v_n) là một cấp số nhân với công bội $q = a$, số hạng đầu $v_1 = u_1 - c$,

tức là $v_1 = \alpha - \dfrac{b}{1-a}$.

Do đó số hạng tổng quát : $v_n = \left(\alpha - \dfrac{b}{1-a}\right).a^{n-1}, \forall n \ge 2$

Suy ra $u_n = \left(\alpha - \dfrac{b}{1-a}\right).a^{n-1} + \dfrac{b}{1-a}, \forall n \ge 2$

Tổng quát : *Dãy số* (u_n) *cho bởi* $\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = au_{n-1} + b, n \ge 2 \end{cases}$. *(*$a, b$ *là các số thực khác* 0*) có số hạng tổng quát như sau:*

$$u_n = \begin{cases} \alpha + (n-1)b \text{ khi } a = 1 \\ \left(\alpha - \dfrac{b}{1-a}\right).a^{n-1} + \dfrac{b}{1-a}, \forall n \ge 2 \text{ khi } a \neq 1 \end{cases}$$

Như vậy ta đã giải quyết xong trường hợp *b trong biểu thức truy hồi* đi kèm là hằng số khác 0, sau đây ta sẽ xét một dãy số mà *b* là một biểu thức $f(n)$.

Ví dụ 2. Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3n - 2, n \ge 2 \end{cases}.$$

✓ ***Phân tích***

Với tư tưởng như ở ví dụ 3. Để tìm số hạng tổng quát của dãy số trên ta sẽ tìm cách làm mất đi $3n-2$ *, và đưa dãy số đã cho về cấp số nhân.*

Muốn vậy ta gọi (v_n) *là dãy số thỏa mãn* $u_n = v_n + a.n + b$.

Lời giải chi tiết

Gọi (v_n) là dãy số thỏa mãn $u_n = v_n + a.n + b$.

Khi đó từ $u_n = 2u_{n-1} + 3n - 2$ ta có $v_n + a.n + b = 2\left[v_{n-1} + a(n-1) + b\right] + 3n - 2$
$\Leftrightarrow v_n = 2v_{n-1} + (a+3)n - 2a + b - 2$

Ta chọn a,b sao cho $(a+3)n - 2a + b - 2 = 0, \forall n \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \end{cases}$.

Như vậy ta có $u_n = v_n - 3n - 4 \Rightarrow (v_n)$ xác định bởi $\begin{cases} v_1 = 8 \\ v_n = 2v_{n-1} \end{cases}$ là cấp số nhân, do đó
$v_n = 8.2^{n-1} = 2^{n+2}$.

Vậy $u_n = 2^{n+2} - 3n - 4, \forall n \geq 1.$

Tổng quát :

Để tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = au_{n-1} + f(n), n \geq 2 \end{cases}.$$

Với $f(n)$ là một đa thức bậc k, ta làm như sau:

Gọi (v_n) là dãy số thỏa mãn $u_n = v_n + g(n)$.

Khi đó ta có

$$v_n = a.v_{n-1} + a.g(n-1) - g(n) + f(n).$$

Ta lựa chọn $g(n)$ thích hợp sao cho $a.g(n-1) - g(n) + f(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (*)$

$$\Rightarrow f(n) = g(n) - ag(n-1)$$

Do đó từ hệ thức truy hồi ta có

$$u_n - g(n) = a\left[u_{n-1} - g(n-1)\right] = \left[u_{n-2} - g(n-2)\right]a^2 = \ldots = \left[u_1 - g(1)\right]a^{n-1}.$$

Vậy $u_n = \left[u_1 - g(1)\right]a^{n-1} + g(n)$.

❖ ***Kinh nghiệm**:*

!!! Vấn đề ở đây là ta chọn $g(n)$ như thế nào cho thích hợp ?

- *Nếu $a = 1$ thì $g(n) - ag(n-1)$ có bậc nhỏ hơn k (là bậc của $f(n)$), do đó ta chọn $g(n)$ là một đa thức bậc $k+1$, và để đơn giản ta chọn hệ số tự do bằng không. Để xác định các hệ số của $g(n)$ từ (*) ta cho các hệ số của đa thức bằng 0.*

- *Nếu* $a \neq 1$ *thì* $g(n) - ag(n-1)$ *có bậc* k *cùng bậc với* $f(n)$*, do đó ta chọn* $g(n)$ *là một đa thức bậc* k*. Để xác định các hệ số của* $g(n)$ *từ* $(*)$ *ta cho các hệ số của đa thức bằng* 0*.*

Để tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ u_n = au_{n-1} + f(n), n \geq 2 \end{cases}.$$

Với $f(n)$ *là một đa thức bậc* k, a *và* α *là hằng số, ta làm như sau:*

Gọi (v_n) *là dãy số thỏa mãn,* $u_n = v_n + g(n)$*, từ đó suy ra*

$f(n) = g(n) - ag(n-1), \forall n \in \mathbb{N}^*$*. Ta có được* $u_n = \left[u_1 - g(1)\right]a^{n-1} + g(n)$*.*

<u>Chú ý</u>: *Nếu* $a = 1$ *thì ta chọn* $g(n)$ *là đa thức bậc* $k+1$ *có hệ số tự do bằng* 0*, còn nếu* $a \neq 1$ *thì chọn* $g(n)$ *là đa thức bậc* k*.*

Ví dụ 3. Cho dãy số nguyên dương $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm chữ số tận cùng của u_{2019}.

[Trích đề HSG Kon Tum năm 2018-2019]

✓ ***Phân tích***

Rõ ràng bài toán này có dạng 2. Để tìm số hạng tổng quát của dãy số trên ta sẽ tìm cách làm mất đi $2n+1$ *và đưa dãy số đã cho về cấp số nhân. Từ công thức truy hồi* $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$ *ta hoàn toàn có thể chọn hệ số* $a = 3$*.*

Lời giải chi tiết

Ta có $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} + n + 2 = 3(u_n + n + 1)$.

Đặt $v_n = u_n + n + 1$ ta được $\begin{cases} v_1 = 2021 \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$ suy ra $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là cấp số nhân,

do đó $v_n = 2021.3^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_{2019} = v_{2019} - 2019 - 1 = 2021.3^{2018} - 2020$.

Ta có $3^4 = 81$ có tận cùng bằng 1.

$\Rightarrow\ 3^{2016} = \left(3^4\right)^{504}$ có tận cùng bằng 1.

$\Rightarrow\ 3^{2018} = 9.3^{2016}$ có tận cùng bằng 9.

$\Rightarrow 2021.3^{2018}$ có tận cùng bằng 9.

$\Rightarrow 2021.3^{2018} - 2020$ có tận cùng bằng 9.

Vậy, $u_{2019} = 2021.3^{2018} - 2020$ là số nguyên dương và có tận cùng bằng 9.

Tiếp theo ta sẽ xét trường hợp f(n) = b. $\boldsymbol{\alpha^n}$

Ví dụ 4. Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho bởi:

$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2^n, n \ge 2 \end{cases}.$$

Lời giải chi tiết

Gọi (v_n) là dãy số thỏa mãn $u_n = v_n + a.2^n$.

Khi đó ta có $v_n + a.2^n = 3(v_{n-1} + a.2^{n-1}) + 2^n \Leftrightarrow v_n = 3v_{n-1} + \left(\frac{1}{2}a + 1\right).2^n$.

Cho $\frac{1}{2}a + 1 = 0 \Rightarrow a = -2$. Suy ra $u_n = v_n - 2^{n+1}$.

Từ đó (v_n) là dãy số xác định bởi $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_n = 3v_{n-1} \end{cases}$.

Như vậy (v_n) là một cấp số nhân với $v_1 = 3$ và công bội $q = 3$.

Do đó $v_n = 3.3^{n-1} = 3^n$. Vậy $u_n = 3^n - 2^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

❖ ***Tổng quát :***

Để tìm số hạng tổng quát của dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_n = au_{n-1} + b.\alpha^n, n \ge 2 \end{cases}$.

a, b, x_0 *là hằng số,* $\alpha \ne 1$. *Ta làm như sau:*

Gọi (v_n) *là một dãy số thỏa mãn* $u_n = v_n + k.\alpha^n$.

Khi đó ta có $v_n = av_{n-1} + b.\alpha^n - k.\alpha^n + ka.\alpha^{n-1}$.

Chọn k *sao cho* $b.\alpha^n - k.\alpha^n + ka.\alpha^{n-1} = 0(*), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow b.\alpha^n = k.\alpha^n - ka.\alpha^{n-1}$$

Từ hệ thức truy hồi ban đầu ta có: $u_n - k.\alpha^n = a\left(u_{n-1} - k.\alpha^{n-1}\right) = a^2\left(u_{n-2} - k.\alpha^{n-2}\right)$

$$= \ldots = \left(u_1 - k.\alpha\right).a^{n-1}.$$

Vậy $u_n = \left(u_1 - k.\alpha\right).a^{n-1} + k.\alpha^n$ *với* $k = \dfrac{b\alpha}{\alpha - a}\left(a \ne \alpha\right)$.

Trường hợp $a = \alpha$, *ta phân tích* $\alpha^n = n.\alpha^n - \alpha\left(n-1\right).\alpha^{n-1}$, *khi đó ta có*

$u_n - bn.\alpha^n = \alpha\left[u_{n-1} - b\left(n-1\right).\alpha^{n-1}\right] = \ldots = \left[u_1 - b\alpha\right]\alpha^{n-1}$.

$\Rightarrow u_n = u_1\alpha^{n-1} + b\left(n-1\right)\alpha^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tổng quát : *Tìm shtq của dãy số (u_n) cho bởi:* $\begin{cases} u_1 = x_0 \\ u_n = au_{n-1} + b.\alpha^n, n \ge 2 \end{cases}$.

Với a, b, x_0 và α là hằng số:

- *Nếu $a = \alpha \Rightarrow u_n = u_1\alpha^{n-1} + b(n-1)\alpha^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.*
- *Nếu $a \ne \alpha$ ta gọi gọi (v_n) là một dãy số thỏa mãn $u_n = v_n + k.\alpha^n$.*

Chọn k sao cho $b.\alpha^n - k.\alpha^n + ka.\alpha^{n-1} = 0(*), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\Rightarrow b.\alpha^n = k.\alpha^n - ka.\alpha^{n-1}$$

Ta được $u_n = (u_1 - k.\alpha).a^{n-1} + k.\alpha^n, voi\, k = \dfrac{b\alpha}{\alpha - a}$.

Ví dụ 5. Cho dãy số thực dương (u_n) được xác định như sau

$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = \sqrt{2} \\ (u_n)^2 - 2(u_{n-1})^2 + (u_{n-2})^2 = 2, \forall n = 3, 4, \dots \end{cases}$. Tính $\lim\left(u_n - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$.

[Trích đề HSG Kon Tum năm 2018-2019]

✓ ***Phân tích***

Để tính $\lim\left(u_n - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$ ta cần tìm số hạng tổng quát u_n. Với giả thiết đã cho trong ví dụ trên có dạng 6. Với cách đặt $v_{n-1} = (u_n)^2 - (u_{n-1})^2$ khi đó ta có được $v_{n-1} = v_{n-2} + 2$, khi đó dãy số (v_n): $\begin{cases} v_1 = (u_2)^2 - (u_1)^2 = 1 \\ v_{n-1} = v_{n-2} + 2; \quad n = 2, 3, 4\dots \end{cases}$ *là cấp số cộng có công sai $d = 2$. Đến đây bài toán đã được gỡ "nút thắt".*

✓ ***Lời giải chi tiết***

Gọi dãy số (v_n) thỏa mãn $v_{n-1} = (u_n)^2 - (u_{n-1})^2$ với $n = 2; 3; \dots$

Dãy số (v_n): $\begin{cases} v_1 = (u_2)^2 - (u_1)^2 = 1 \\ v_{n-1} = v_{n-2} + 2; \quad n = 2, 3, 4\dots \end{cases}$ là cấp số cộng có công sai $d = 2$

$\Rightarrow v_{n-1} = v_1 + (n-2)d = 2n - 3 \Leftrightarrow (u_n)^2 - (u_{n-1})^2 = 2n - 3$

Suy ra $(u_n)^2 - (u_{n-1})^2 = 2n - 3$

$(u_{n-1})^2 - (u_{n-2})^2 = 2(n-1) - 3$

.... $(u_3)^2 - (u_2)^2 = 2.3 - 3$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được

$$(u_n)^2-(u_2)^2=2(3+4+...+n)-(n-2).3$$

$$(u_n)^2=2.\frac{(n-2)(n+3)}{2}-3(n-2)+2=n^2-2n+2$$

Suy ra $u_n=\sqrt{n^2-2n+2}$, với $n=1;2;.....$

Vậy $\lim\left(u_n-\sqrt[3]{n^3+1}\right)=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+2}-n+n-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$

$$=\lim\left(\frac{-2n+2}{\sqrt{n^2-2n+2}+n}-\frac{1}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2}\right)=-1.$$

Kỹ năng số 3. TÌM CÔNG THỨC THU GỌN u_n THEO n CỦA DÃY SỐ

1) $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n.(n+1)}$

2) $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

3) $u_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

4) $u_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

5) $u_n=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

Chứng minh:

1) $\forall k\in\mathbb{N}^*$ ta có $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

Khi $k=1\Rightarrow\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$

Khi $k=2\Rightarrow\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

Khi $k=3\Rightarrow\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

... ...

Khi $k=n\Rightarrow\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Cộng n đẳng thức trên theo vế ta được $u_n=1-\frac{1}{n+1}\Rightarrow u_n=\frac{n}{n+1}$

2) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ta có $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right]$

Khi $k=1 \Rightarrow \dfrac{1}{1.3} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3}\right]$

Khi $k=2 \Rightarrow \dfrac{1}{3.5} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right]$

Khi $k=3 \Rightarrow \dfrac{1}{5.7} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right]$

... ...

Khi $k=n \Rightarrow \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right]$

Cộng n đẳng thức trên theo vế và giản ước ta được

$u_n = \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{2n+1}\right] \Rightarrow u_n = \dfrac{n}{2n+1}$

3) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ta có $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)} = \dfrac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

Khi $k=1 \Rightarrow \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Khi $k=2 \Rightarrow \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Khi $k=3 \Rightarrow \dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}}$

... ...

Khi $k=n \Rightarrow \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Cộng n đẳng thức trên theo vế và giản ước ta được

$u_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}}$

4) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ta có

$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

Khi $k=1 \Rightarrow \dfrac{1}{1.2.3} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{2.3}\right]$

Khi $k=2 \Rightarrow \dfrac{1}{2.3.4} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2.3} - \dfrac{1}{3.4}\right]$

Khi $k=3 \Rightarrow \dfrac{1}{3.4.5} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3.4} - \dfrac{1}{4.5}\right]$

... ...

Khi $k = n \Rightarrow \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

Cộng n đẳng thức trên theo vế và giản ước ta được

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

5) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ta có $\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{\dfrac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{k^2(k+1)^2+2k(k+1)+1}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{\left[k(k+1)+1\right]^2}{k^2(k+1)^2}} = \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = 1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Khi $k=1 \Rightarrow \sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}} = 1+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}$

Khi $k=2 \Rightarrow \sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}} = 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$ ……………………..

Khi $k=n \Rightarrow \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}} = 1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

Cộng n đẳng thức trên theo vế và giản ước ta được

$$u_n = n+1-\frac{1}{n+1} \Rightarrow u_n = \frac{n(n+2)}{n+1}.$$

Ví dụ áp dụng 1.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \dfrac{P_n}{A_{n+2}^n}$ trong đó P_n là số hoán vị của n phần tử, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Tìm $\lim \mathrm{S_n}$.

[Trích đề HSG Hà Nội 2009-2010]

✓ ***Phân tích***

Nhận thấy rằng $P_n = n!,\ A_{n+2}^n = \dfrac{(n+2)!}{2!}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{n!.2!}{(n+2)!} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$. *Dấu hiệu để sử dụng công thức số 1)*

Lời giải chi tiết

Ta có $P_n = n!,\ P_n = n!,\ A_{n+2}^{n} = \dfrac{(n+2)!}{2!}$

$$\Rightarrow u_n = \frac{n!.2!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow S_n = 2\left[\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\Rightarrow S_n = 2\left[\frac{3-2}{2.3} + \frac{4-3}{3.4} + \frac{5-4}{4.5} + \ldots + \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\Rightarrow S_n = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right]$$

$$\Rightarrow S_n = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right] \Rightarrow \lim S_n = 1$$

Rèn luyện kỹ năng số 3.

Ví dụ áp dụng 2.

Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = \dfrac{2}{3}$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hãy tính tổng 2023 số hạng đầu tiên của dãy số.

Hướng dẫn

Phân tích theo đề bài $\Rightarrow x_1 = \dfrac{2}{3},\quad x_2 = \dfrac{2}{15},\quad x_3 = \dfrac{2}{35}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2}{1.3},\quad x_2 = \frac{2}{3.5},\quad x_3 = \frac{2}{5.7}$$

Theo quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $x_n = \dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dấu hiệu để sử dụng công thức số 3)
Đến đây bạn đọc có thể tính được tổng 2023 số hạng đầu tiên của dãy số.

Nhân xét. *Chúng ta có thể phân tích theo cách số 2 như sau*

Từ $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} = 2(2n+1) + \dfrac{1}{x_n}$

Nên ta có $\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{3}{2}$

$$\frac{1}{x_2} = 2(2.1+1) + \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{1}{x_3} = 2(2.2+1) + \frac{1}{x_2}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{1}{x_n}=2\left[2(n-1)+1\right]+\frac{1}{x_{n-1}}$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{x_n}=\frac{3}{2}+4\left[1+2+...+(n-1)\right]+2(n-1)=\frac{3}{2}+2(n-1)n+2(n-1)$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left[4n^2-1\right]\Rightarrow x_n=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}$ *Dấu hiệu để sử dụng công thức số 3)*

Kỹ năng số 4. MỘT SỐ DẠNG TRUY HỒI SỬ DỤNG CÁC TỔNG – TÍCH ĐẶC BIỆT

Loại 1. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases}u_1=a\\ u_{n+1}=u_n+f(n)\end{cases}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $\begin{cases}u_2=u_1+f(1)\\ u_3=u_2+f(2)\\ u_4=u_3+f(3)\\ .....\\ u_{n-1}=u_{n-2}+f(n-2)\\ u_n=u_{n-1}+f(n-1)\end{cases}$

Cộng vế theo vế ta được

$$u_2+u_3+u_4+...+u_{n-1}+u_n=u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_{n-1}+f(1)+f(2)+.......+f(n-1)$$

Rút gọn ta được $u_n=u_1+f(1)+f(2)+.......+f(n-1)$

<u>Ví dụ 1</u>. Cho dãy (u_n): $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=u_n+n^3+2n^2-n+1\ ;\ n\ge 1, n\in\mathbb{N}.\end{cases}$.

Tìm $\lim\dfrac{u_n}{2023.n^4}$.

Lời giải chi tiết

Đặt $f(n)=n^3+2n^2-n+1$

Suy ra $u_{n+1}=u_n+f(n)$

Ta có $\begin{cases}u_2=u_1+f(1)\\ u_3=u_2+f(2)\\ u_4=u_3+f(3)\\ .....\\ u_{n-1}=u_{n-2}+f(n-2)\\ u_n=u_{n-1}+f(n-1)\end{cases}$

$$\Rightarrow u_2+u_3+u_4+...+u_{n-1}+u_n=u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_{n-1}+f(1)+f(2)+.......+f(n-1)$$

Rút gọn ta được $u_n = u_1 + f(1) + f(2) + ... + f(n-1)$

Mà $f(n) = n^3 + 2n^2 - n + 1$ nên ta có

$$T = f(1) + f(2) + ... + f(n-1)$$
$$= \left[1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3\right] + 2\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2\right] - \left[1 + 2 + 3 + ... + (n-1)\right] + n - 1$$

Suy ra $u_n = 1 + \dfrac{(n-1)^2.n^2}{4} + 2.\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \dfrac{(n-1)n}{2} + n - 1$

$$u_n = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{6}n^3 - \frac{5}{4}n^2 + \frac{11}{6}n$$

Vậy $\lim \dfrac{u_n}{2023.n^4} = \dfrac{1}{8092}$.

Kinh nghiệm : *Để làm tốt dạng này cần nắm vững các dạng tổng đặc biệt* $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Loại 2. Cho dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n.f(n) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Ta có $\begin{cases} u_2 = u_1.f(1) \\ u_3 = u_2.f(2) \\ u_4 = u_3.f(3) \\ ..... \\ u_{n-1} = u_{n-2}.f(n-2) \\ u_n = u_{n-1}.f(n-1) \end{cases}$

Nhân vế theo vế ta được $u_2.u_3.u_4...u_{n-1}.u_n = u_1.u_2.u_3.u_4...u_{n-1}.f(1).f(2)....f(n-1)$

Rút gọn ta được $u_n = u_1.f(1).f(2)....f(n-1)$

<u>**Ví dụ 2**</u>. Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1;\ u_2 = 3 \\ u_{n+1} = u_n.\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}\ ;\forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$.   Tìm $\lim(2023.u_n)$.

Lời giải chi tiết

Đặt $f(n)=\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}=\dfrac{\sqrt{n-1}.\sqrt{n+1}}{n}$ suy ra $u_{n+1}=u_n.f(n)$

Ta có $\begin{cases} u_3=u_2.f(2) \\ u_4=u_3.f(3) \\ ..... \\ u_{n-1}=u_{n-2}.f(n-2) \\ u_n=u_{n-1}.f(n-1) \end{cases}$

Nhân vế theo vế ta được $u_3.u_4...u_{n-1}.u_n=u_2.u_3.u_4...u_{n-1}.f(2)....f(n-1)$

Rút gọn ta được $u_n=u_2.f(2)....f(n-1)$

$$P=f(2)+.......+f(n-1)=\frac{1.\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}.\sqrt{4}}{3}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{5}}{4}.......\frac{\sqrt{n-3}.\sqrt{n-1}}{n-2}.\frac{\sqrt{n-2}.\sqrt{n}}{n-1}$$

$P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}=\sqrt{\dfrac{2n}{n-1}}$. Suy ra $u_n=u_2.f(2)....f(n-1)=3.\sqrt{\dfrac{2n}{n-1}}$.

Vậy $\lim(2023.u_n)=\lim 6069.\sqrt{\dfrac{2n}{n-1}}=6069\sqrt{2}.$

Kinh nghiệm : *Để làm tốt dạng này cần rèn luyện các kỹ năng phân tích để rút gọn.*

Một số trường hợp thường gặp :

1. $\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}=\dfrac{\sqrt{n-1}.\sqrt{n+1}}{n}$

2. $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\quad\to S=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$

3. $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]\to S=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+...++\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

4. $u_n=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)u_{n-1}=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)u_{n-2}=...=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{(n-1)^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)u_1$

$$u_n=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}.\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}.\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)^2}.\frac{(n-2)(n-4)}{(n-3)^2}...\frac{4.2}{3^2}.\frac{3.1}{2^2}.u_1=\frac{n+1}{2n}.u_1$$

Kỹ năng số 5. CÁCH ĐẶT DÃY SỐ PHỤ ĐỐI VỚI CÁC DẠNG DÃY SỐ CHỨA PHÂN THỨC.

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{4+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Chứng minh rằng (v_n) là cấp số nhân. Tính $\lim u_n$?

Lời giải chi tiết

Ta có $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \Rightarrow v_n(u_n + 3) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{3v_n + 1}{1 - v_n}$

Thay $u_n = \dfrac{3v_n + 1}{1 - v_n}$ vào $u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{4+u_n}$

Ta được

$$\frac{3v_{n+1}+1}{1-v_{n+1}} = \frac{3+2u_n.\dfrac{3v_n+1}{1-v_n}}{4+\dfrac{3v_n+1}{1-v_n}} \Leftrightarrow \frac{3v_{n+1}+1}{1-v_{n+1}} = \frac{3-3v_n+6v_n+2}{4-4v_n+3v_n+1} \Leftrightarrow \frac{3v_{n+1}+1}{1-v_{n+1}} = \frac{3v_n+5}{5-v_n}$$

$$\Leftrightarrow 15v_{n+1} - 3v_{n+1}.v_n + 5 - v_n = 3v_n + 5 - 3v_{n+1}.v_n - 5v_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 20v_{n+1} = 4v_n \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$$

Do đó (v_n) là cấp số nhân có $v_1 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1 + 3} = -\dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{1}{5}$.

Suy ra $v_n = v_1 q^{n-1} = -\dfrac{1}{3}.(\dfrac{1}{5})^{n-1}$

Vậy $\lim u_n = \lim \dfrac{3v_n + 1}{1 - v_n} = 1$.

✓ ***Phân tích :***

!!! Vấn đề ở đây là bài toán không cho giả thiết đặt dãy số phụ $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$ ***thì làm thế nào để tính được*** $\lim u_n$.

Trong trường hợp ta có thể áp dụng kết quả tổng quát sau:

Tổng quát: Cho $(u_n):\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{bu_n + c}{du_n + e} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $v_{n+1} = bv_n + ct_n$ $\rightarrow$ « *Đặt theo tử số* », với $v_1 = u_1 = a$

$t_{n+1} = dv_n + et_n$ $\rightarrow$ « *Đặt theo mẫu số* », với $t_1 = 1$ *cố định*

Từ đó suy ra v_n, t_n, u_n. *Khi đó ta có được* $u_n = \dfrac{v_n}{t_n}$.

Ví dụ 2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2 + x_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Tìm số hạng tổng quát x_n và tính $\lim x_n$?

Lời giải chi tiết

Xét (u_n) và (v_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = x_1 = 1 \\ v_1 = 1 \end{cases}$

$u_{n+1} = u_n + 0.v_n$ hay $u_{n+1} = u_n \Rightarrow u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

và $v_{n+1} = u_n + 2.v_n \Rightarrow v_{n+1} = 1 + 2.v_n \Rightarrow v_{n+1} + 1 = 2.(v_n + 1)$ (*) trong đó $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

Đặt $t_n = v_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ từ (*) ta có $t_{n+1} = 2t_n$

suy ra (t_n) là cấp số nhân có $t_1 = 1, q = 2$

Khi đó ta có $t_n = 2.2^{n-1} = 2^n$; $v_n = t_n - 1 = 2^n - 1$

Vậy $x_n = \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{2^n - 1}$ và $\lim x_n = \lim \dfrac{1}{2^n - 1} = 0$

✓ **Nhận xét :** *Trong trường hợp chúng ta không nhớ cách đặt dãy số phụ như ở trên thì chúng ta sẽ giải quyết bài toán này như thế nào?Mời bạn đọc tham khảo cách giải quyết bài toán theo cách 2 như sau và tìm mối liên hệ với **kỹ năng số 2** về các bài toán tìm số hạng tổng quát liên quan đến **cấp số nhân***

<u>**Cách 2**</u>. $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2 + x_n} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{2 + x_n}{x_n} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{2}{x_n} + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}} + 1 = 2(\dfrac{1}{x_n} + 1)$

Đặt $v_n = \dfrac{1}{x_n} + 1$ ta có $v_{n+1} = 2v_n$

Suy ra (v_n) là ***cấp số nhân*** có $v_1 = \dfrac{1}{x_1} + 1 = 2$ và công bội $q = 2$ $\rightarrow v_n = 2.2^{n-1} = 2^n$

Do đó $v_n = \frac{1}{x_n} + 1 \Rightarrow x_n = \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{2^n - 1}$. Vậy $\lim x_n = \lim \frac{1}{2^n - 1} = 0.$

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Tìm số hạng tổng quát u_n và tính $\lim u_n$?

Lời giải chi tiết

Xét (v_n) và (t_n) thỏa mãn $\begin{cases} v_1 = u_1 = -2 \\ t_1 = 1 \end{cases}$

$v_{n+1} = v_n$ hay $\Rightarrow v_n = -2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

và $t_{n+1} = -v_n + 1.t_n \Rightarrow t_{n+1} = 2 + t_n$ (*) trong đó $u_n = \frac{v_n}{t_n}$

Đặt $t_n = v_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ từ (*) ta có $t_{n+1} = t_n + 2$

suy ra (t_n) là ***cấp số cộng*** có $t_1 = 1, d = 2$

Khi đó ta có $t_n = t_1 + (n-1)d = 1 + (n-1).2 = 2n - 1$

Vậy $u_n = \frac{v_n}{t_n} = \frac{-2}{2n-1}$ và $\lim u_n = \lim \frac{1}{2n-1} = 0.$

✓ ***Nhận xét :*** *Trong trường hợp chúng ta không nhớ cách đặt dãy số phụ như ở trên thì chúng ta sẽ giải quyết bài toán này như thế nào?Mời bạn đọc tham khảo cách giải quyết bài toán theo cách 2 như sau và tìm mối liên hệ với **kỹ năng số 2**. về các bài toán tìm số hạng tổng quát liên quan **đến cấp số cộng.***

Cách 2. $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1 - u_n}{u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - 1$

$$\rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{2}$$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $v_{n+1} = v_n - 1.$

Suy ra (v_n) là ***cấp số cộng*** có $v_1 = \frac{1}{u_1} = -\frac{1}{2}, d = -1$

Khi đó ta có $v_n = v_1 + (n-1)d = -n + \frac{1}{2}$

Vậy $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{-n + \frac{1}{2}} = \frac{2}{1 - 2n}$ và $\lim u_n = \lim \frac{2}{1-2n} = 0.$

Kỹ năng số 6. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG SAI PHÂN

Sai phân : $\Delta_k = x_{k+1} - x_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\Delta_k = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$

Kỹ năng chính : *Biểu diễn tổng các số hạng sai phân.*

<u>Ví dụ 1</u>. Cho dãy $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n^{2023} \end{cases}; n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim\left(\dfrac{u_1^{2023}}{u_2} + \dfrac{u_2^{2023}}{u_3} + \dfrac{u_3^{2023}}{u_4} + ... + \dfrac{u_n^{2023}}{u_{n+1}}\right)$.

✓ ***Phân tích***

Từ yêu cầu tính giới hạn $\dfrac{u_1^{2023}}{u_2} + \dfrac{u_2^{2023}}{u_3} + \dfrac{u_3^{2023}}{u_4} + ... + \dfrac{u_n^{2023}}{u_{n+1}}$ *chúng ta sẽ nghĩ ngay đến việc dùng phương pháp sai phân. Vấn đề ở đây ta từ cách cho dãy số ta biến đổi để đưa về dạng sai phân thế nào?*

Nhận thấy $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n^{2023} \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{u_n^{2023}}{u_{n+1}} \Rightarrow \dfrac{u_n^{2023}}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}$ *đến đây bạn đọc có thể giải quyết được bài toán.*

Lời giải chi tiết

Từ công thức xác định giới hạn dãy số , ta có

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{u_n^{2023}}{u_{n+1}} \Rightarrow \frac{u_n^{2023}}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

Suy ra $\dfrac{u_1^{2023}}{u_2} + \dfrac{u_2^{2023}}{u_3} + \dfrac{u_3^{2023}}{u_4} + ... + \dfrac{u_n^{2023}}{u_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{u_k^{2023}}{u_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{u_k} - \dfrac{1}{u_{k+1}}\right) = \dfrac{1}{u_1} - \dfrac{1}{u_{n+1}}$

Rõ ràng $u_n > 0, \forall n$ nên ta có $u_{n+1} = u_n + u_n^{2024} > u_n$. Do vậy dãy số đã cho tăng.

Giả sử dãy số bị chặn trên thì nó sẽ có giới hạn là l và $l > 1$

Qua giới hạn ta có $l = l + l^{2024} \Leftrightarrow l = 0$ (Mâu thuẫn $l > 1$)

Do vậy dãy số không bị chặn trên hay $\lim u_n = +\infty$

Vậy $\lim\left(\dfrac{u_1^{2023}}{u_2} + \dfrac{u_2^{2023}}{u_3} + \dfrac{u_3^{2023}}{u_4} + ... + \dfrac{u_n^{2023}}{u_{n+1}}\right) = \lim\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{u_n}\right) = 1.$

***Nhận xét :** - Đối với bài toán này thuộc dạng quen thuộc với ý tưởng là rút gọn sai phân để đưa giới hạn cần tính về giới hạn của dãy số ban đầu. Ví dụ này rất thuận lợi vì công thức đã thể hiện khá rõ nét. Do đó việc lập luận cẩn thận, kỹ năng biến đổi cẩn thận là hết sức cần thiết.*

- Một số kỹ thuật thường gặp khi sử dụng phương pháp này

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG SỐ 6 THÔNG QUA CÁC VÍ DỤ SAU

Ví dụ áp dụng 1.1.

Cho dãy số (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2022}, n \geq 1 \end{cases}$. *Tính* $\lim\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_1}{u_2} + \ldots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Hướng dẫn:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}.u_n} = \frac{2022(u_{n+1} - u_n)}{u_{n+1}.u_n} = 2022\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

Ví dụ áp dụng 1.2.

Cho dãy số thực dương (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = \sqrt{2} \\ (u_n)^2 - 2(u_{n-1})^2 + (u_{n-2})^2 = 2, \forall n = 3, 4, \ldots \end{cases}$

[Trích đề HSG Kon Tum 2019-2020]

Hướng dẫn:

Gọi dãy số (v_n) thỏa mãn $v_{n-1} = (u_n)^2 - (u_{n-1})^2$ với $n = 2; 3; \ldots$

dãy số (v_n) $\begin{cases} v_1 = (u_2)^2 - (u_1)^2 = 1 \\ v_{n-1} = v_{n-2} + 2; \quad n = 2, 3, 4\ldots \end{cases}$ là cấp số cộng có công sai $d = 2$

$\Rightarrow v_{n-1} = v_1 + (n-2)d = 2n - 3 \Leftrightarrow (u_n)^2 - (u_{n-1})^2 = 2n - 3$

Suy ra $(u_n)^2 - (u_{n-1})^2 = 2n - 3$

$(u_{n-1})^2 - (u_{n-2})^2 = 2(n-1) - 3$

....

$(u_3)^2 - (u_2)^2 = 2.3 - 3$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được :

$$(u_n)^2 - (u_2)^2 = 2(3 + 4 + \ldots + n) - (n-2).3$$

$$(u_n)^2 = 2.\frac{(n-2)(n+3)}{2} - 3(n-2) + 2 = n^2 - 2n + 2.$$

Suy ra $u_n = \sqrt{n^2 - 2n + 2}$,với $n = 1; 2; \ldots$

Ví dụ 2. Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(u_n{}^2 + u_n + 4\right) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số tăng nhưng không bị chặn trên.

b) Đặt $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k + 3}, \ = 1,2,3....$ Tính $\lim v_n$.

[Trích đề HSG Vĩnh Long - Vòng 1]

✓ ***Phân tích***

- *Để chứng minh dãy số (u_n) là dãy số tăng ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n > 0$.*
- *Đối với việc chứng minh dãy số không bị chặn ta có thể sử phản chứng. Vì (u_n) là dãy số tăng nên ta giả sử dãy số (u_n) bị chặn trên. Chuyển qua giới hạn ta có được điều cần chứng minh.*
- *Giả thiết cho $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k + 3}, \ = 1,2,3....$ ta sử dụng phương pháp tìm hệ số bất định để sử dụng phương pháp sai phân.*

  Giả sử ta có $\dfrac{1}{u_k + 3} = a\left(\dfrac{1}{u_k + b} - \dfrac{1}{u_{k+1} + b}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_k + 3} = a\dfrac{u_{k+1} - u_k}{(u_k + b)(u_{k+1} + b)}$

Lời giải chi tiết

a) Dễ thấy với mọi n thì các số hạng của dãy số đã cho đều dương

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{5}\left(u_n^2 + u_n + 4\right) - u_n = \dfrac{1}{5}\left(u_n^2 - 4u_n + 4\right) = \dfrac{1}{5}(u_n - 2)^2 \geq 0$

Do đó dãy số (u_n) là dãy số không giảm.

Ta lại có $u_1 = 3 > 2$ nên $u_n > 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra (u_n) là dãy số tăng.

Giả sử dãy số bị chặn trên. Khi đó dãy số (u_n) có giới hạn đặt $\lim u_n = a \geq 3$

Chuyển qua giới hạn ta được: $a = \dfrac{1}{5}(a^2 + a + 4) \Rightarrow a = 2$ (mâu thuẫn)

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng nhưng không bị chặn trên và $\lim u_n = +\infty$.

b) Giả sử ta có $\dfrac{1}{u_k + 3} = a\left(\dfrac{1}{u_k + b} - \dfrac{1}{u_{k+1} + b}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_k + 3} = a\dfrac{u_{k+1} - u_k}{(u_k + b)(u_{k+1} + b)}$

hay $(3a - b)u_{k+1} + (a - 1)u_{k+1}.u_k = au_k^2 + (3a + b)u_k + b^2$

Để có tương ứng với công thức quan hệ xây dựng dãy, ta chọn $a=1$ thì ta được quan hệ đơn giản hơn là $(3-b)u_{n+1}=u_n^2+(3+b)u_n+b^2$

Sau đó ta chọn $b=-2$ thì ta được công thức đã cho $u_{n+1}=\frac{1}{5}\left(u_n{}^2+u_n+4\right)$

Như thế ta có $\frac{1}{u_k+3}=\frac{1}{u_k-2}-\frac{1}{u_{k+1}-2}$

Suy ra $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k+3}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k-2}-\frac{1}{u_{k+1}-2}\right)=\frac{1}{u_1-2}-\frac{1}{u_{n+1}-2}=1-\frac{1}{u_{n+1}-2}$

Mà ta có $\lim u_n=+\infty$.

Vậy $\lim v_n=\lim\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-2}\right)=1$.

Nhận xét :* - *Qua ví dụ 2 này ta đã sử dụng phương pháp hệ số bất định để tìm mối quan hệ dạng sai phân giữa các biểu thức liên quan nhằm rút tổng cần tính để đi tìm giới hạn của dãy số *(v_n).*

- Đối với các bài toán tính giới hạn của dãy số thì có rất nhiều dạng. Do vậy việc thành thạo các kỹ năng và kết hợp các kỹ năng 1 về Cấp số cộng, cấp số nhân ; Kỹ năng 2 về tính đơn điệu và bị chặn ; kết với kỹ năng số 5 về sử dụng sai phân thì chứng ta mới giải quyết trọn vẹn bài toán trên.

III. BÀI TẬP ỨNG DỤNG BÀI TOÁN TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT VÀO MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ DÃY SỐ.

Trong phần này chúng ta sẽ cùng nhau xem xét một số ứng dụng rất hiệu quả của bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số như: Tính giới hạn của dãy số, chứng minh tính bị chặn, tính đơn điệu của dãy số, tính tổng của một dãy số, ...

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$. Tính lim u_n.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{2(2n-1)u_{n-1}+1}, n \geq 2 \end{cases}$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$

Số 16385 có nằm trong dãy (u_n) không ? Nếu có thì đó là số hạng thứ mấy?

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2013, u_2 = 2014 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$

a) Tìm số hạng tổng quát u_n.

b) Tính tổng n số hạng đầu tiên S_n.

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n^2 + 2}, n \geq 1 \end{cases}$

a) Xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n)

b) Tính tổng $S = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2011}^2$

[Trích đề HSG Long An 2011]

Bài tập 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{2u_n + 1}, n \ge 1 \end{cases}$

Tính $\lim u_n$.

[Trích đề HSG - TP HCM 2012-2013]

Bài tập 7. Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 2005, x_2 = 2006 \\ x_n\left(x_{n-1} + x_{n+1}\right) = 2x_{n-1}.x_{n+1} \end{cases}$$

Tính $\lim x_n$.

[Trích đề Olympic 30/04– Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ]

Bài tập 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{9}\left(u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}\right) \quad \forall n \in N^* \end{cases}.$$

Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số.

[Trích đề HSG Thái Nguyên 2019]

Bài tập 9. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2020 \\ \left(n^2 + 5n + 5\right)u_n = \left(2n^2 + 6n + 2\right)u_{n+1} \end{cases}, n = 1; 2; 3; \ldots$

Tính $\lim\left(\dfrac{2^n u_n}{n^2}\right)$.

[Trích đề HSG Kon Tum năm 2020-2021]

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài tập 1.

Đặt $v_n = u_n - \dfrac{15}{4}$ thì dễ dàng chứng minh được dãy số (v_n) là một cấp số nhân xác định như sau: $\begin{cases} v_1 = \dfrac{25}{4} \\ v_n = \dfrac{1}{5}v_{n-1}, n \ge 2 \end{cases}$

Do đó ta có $\qquad v_n = v_1 q^{n-1} = \dfrac{25}{4}.\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

Suy ra $$u_n = v_n + \frac{15}{4} = \frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{15}{4}$$

Từ đó ta được $$\lim u_n = \lim\left[\frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{15}{4}\right] = \frac{15}{4} \blacksquare$$

Bài tập 2.

Ta có $$u_n = \frac{u_{n-1}}{2(2n-1)u_{n-1}+1} \to \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n-1}} + 2(2n-1)$$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$, ta có (v_n) là dãy số xác định bởi $\begin{cases} v_1 = \frac{3}{2} \\ v_n = v_{n-1} + 4n - 2 \end{cases}$

Sử dụng cách giải bài toán ở ***Dạng 2*** ta tìm được

$$v_n = \frac{4n^2-1}{2} \Rightarrow u_n = \frac{2}{4n^2-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n+1} = 1 \blacksquare$

Bài tập 3.

Ta có $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \Rightarrow u_n - u_{n-1} = 2(u_{n-1} - u_{n-2})$

Đặt $v_{n-1} = u_n - u_{n-1}, n \geq 2$, thì (v_n) là dãy số xác định bởi $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_n = 2.v_{n-1} \end{cases}$,

tức (v_n) là một cấp số nhân do đó số hạng tổng quát của nó là $v_n = 2^{n-1}$.

Khi đó dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = u_{n-1} + 2^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$

Từ đó tìm được số hạng tổng quát của (u_n) là: $u_n = 1 + 2^{n-1}$

Xét $u_n = 16385 \Leftrightarrow 1 + 2^{n-1} = 16385 \Leftrightarrow n = 15$.

Vậy 16385 là số hạng thứ 15 của dãy số (u_n). $\blacksquare$

Bài tập 4.

a) Từ hệ thức truy hồi ta có $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 3$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$, ta có dãy số (v_n) là một cấp số cộng xác định bởi :

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_n = v_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Do đó số hạng tổng quát $v_n = 1 + (n-1)3 = 3n - 2$

Như vậy dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2013 \\ u_n = u_{n-1} + 3n - 5 \end{cases}$$

Suy ra $u_n = u_1 - g(1) + g(n)$, với $g(n) = an^2 + bn$; $a, b \in \mathbb{R}$

Sao cho $3n - 5 = an^2 + bn - a(n-1)^2 - b(n-1), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow (2a-3)n - a + b + 2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 3 = 0 \\ -a + b + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Suy ra $g(n) = \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{7}{2}n$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{7}{2}n + 2015, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$\Rightarrow S_n = \dfrac{3}{2}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) - \dfrac{7}{2}\left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right) + 2015n$

$= \dfrac{3}{2}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{7}{2}\dfrac{n(n+1)}{2} + 2015n$

Vậy $S_n = n(n-3)(n+1) + 2015n$. ■

Bài tập 5.

a) Từ hệ thức truy hồi ta có $u_{n+1}^2 = 3u_n^2 + 2, n \geq 1$

Đặt $v_n = u_n^2$, thì (v_n) là dãy số xác định bởi :

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_n = 3v_{n-1} + 2, n \geq 1 \end{cases}$$

Từ đó dễ dàng tìm được $v_n = 2.3^{n-1} - 1$.

Vậy ta có $u_n = \sqrt{2.3^{n-1} - 1}, n \geq 1$ ■

b) Ta có $S = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{2011}^2$

$$=\left(2.3^0-1\right)+\left(2.3^1-1\right)+\left(2.3^2-1\right)+\ldots+\left(2.3^{2010}-1\right)$$

$$=2\left(3^0+3^1+3^2+\ldots+3^{2010}\right)-2011=2.\frac{3^{2011}-1}{3-1}-2011=3^{2011}-2012.\ \blacksquare$$

Bài tập 6. Đặt $u_n=x_n+t, t\in\mathbb{R}$, ta có

$$x_{n+1}=\frac{(3-2t)x_n-2t^2+2t+4}{2x_n+2t+1}$$

Chọn t sao cho $-2t^2+2t+4=0\Rightarrow t=2$

Khi đó (x_n) là dãy số xác định bởi : $\begin{cases} x_1=-\dfrac{3}{2} \\ x_{n+1}=-\dfrac{x_n}{2x_n+5}, (*) n\geq 1 \end{cases}$

Từ (*) ta có : $\dfrac{1}{x_{n+1}}=-2-\dfrac{5}{x_n}\left(vì\ x_n\neq 0,\forall n\right)$

Đặt $y_n=\dfrac{1}{x_n}$, thì $\left(y_n\right)$ là dãy số xác định bởi : $\begin{cases} y_1=-\dfrac{2}{3} \\ y_{n+1}=-5y_n-2, n\geq 1 \end{cases}$

Từ đó dễ dàng tìm được số hạng tổng quát của dãy số $\left(y_n\right)$ là:

$$y_n=-\frac{1}{3}(-1)^{n-1}5^{n-1}-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_n=\frac{-3}{(-1)^{n-1}5^{n-1}+1} \qquad \Rightarrow u_n=\frac{2.(-1)^{n-1}5^{n-1}-1}{(-1)^{n-1}5^{n-1}+1}$$

Vậy $\lim u_n=\lim\dfrac{2.(-1)^{n-1}5^{n-1}-1}{(-1)^{n-1}5^{n-1}+1}=2\ \blacksquare$

Bài tập 7. Ta có $x_n\left(x_{n-1}+x_{n+1}\right)=2x_{n-1}.x_{n+1}\Rightarrow\dfrac{2}{x_n}=\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{1}{x_{n+1}}$

Đặt $y_n=\dfrac{1}{x_n}$, thì (y_n) là dãy số xác định bởi $\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{2005}, y_2=\dfrac{1}{2006} \\ y_{n+1}=2y_n-y_{n-1} \end{cases}$

Từ đó dễ dàng suy ra (y_n) là một cấp số cộng xác định bởi $\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{2005} \\ y_n=y_n-\dfrac{1}{2005.2006} \end{cases}$

Do đó ta có $y_n = \dfrac{-n+2007}{2005.2006}$. Suy ra $x_n = \dfrac{2005.2006}{-n+2007}$

Vậy $\lim x_n = \lim \dfrac{2005.2006}{-n+2007} = 0.$ ■

Bài tập 8. Đặt $x_n = \sqrt{1+2u_n} \quad \forall n \in N^*$

Ta có $x_n \geq 0$ và $x_n^2 = 1+2u_n, \forall n \in N^*$ hay $u_n = \dfrac{x_n^2 - 1}{2}$

Thay vào giả thiết, ta được

$$\frac{x_{n+1}^2 - 1}{2} = \frac{1}{9}\left(\frac{x_n^2 - 1}{2} + 4 + 4x_n\right)$$
$$\Leftrightarrow 9x_{n+1}^2 - 9 = x_n^2 - 1 + 8 + 8x_n$$
$$\Leftrightarrow (3x_{n+1})^2 = (x_n + 4)^2$$

Suy ra: $3x_{n+1} = x_n + 4 \quad \forall n \in N^*$ do $x_n \geq 0$ hay $3^{n+1}x_{n+1} = 3^n x_n + 4.3^n$, $\forall n \in N^*$

Đặt $y_n = 3^n x_n$, $\forall n \in N^*$. Ta có: $y_{n+1} = y_n + 4.3^n$, $\forall n \in N^*$

Từ đó $y_{n+1} = y_1 + 4\left(3^n + 3^{n-1} + ... + 3\right)$, $\forall n \in N^*$ hay $y_{n+1} = y_1 - 6 + 2.3^{n+1}$, $\forall n \in N^*$

Theo cách đặt ta có: $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 9 \Rightarrow y_n = 3 + 2.3^n$.

Suy ra $x_n = 2 + \dfrac{1}{3^{n-1}}$, $\forall n \in N^*$.Do đó $u_n = \dfrac{1}{2}\left(3 + \dfrac{4}{3^{n-1}} + \dfrac{1}{3^{2n-2}}\right)$, $\forall n \in N^*$

Bài tập 9.

Từ $\left(n^2+5n+5\right)u_n = \left(2n^2+6n+2\right)u_{n+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{2n^2+6n+2} = \frac{u_{n+1}}{n^2+5n+5} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 1} = \frac{1}{2}.\frac{u_n}{n^2+3n+1} \quad (*)$$

Gọi dãy số (v_n) thỏa mãn $v_n = \dfrac{u_n}{n^2+3n+1} \Rightarrow v_1 = \dfrac{u_1}{5} = 404$

Từ $(*)$ ta suy ra dãy số (v_n): $\begin{cases} v_1 = 404 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$, $n = 1; 2; 3; ...$

$\Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow v_n = 404.\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

$$\Rightarrow u_n = v_n.\left(n^2+3n+1\right) = \frac{404}{2^{n-1}}\left(n^2+3n+1\right)$$

$$\Rightarrow \lim\left(\frac{2^n u_n}{n^2}\right) = \lim\left[\frac{2^n}{n^2}.\frac{404}{2^{n-1}}.\left(n^2+3n+1\right)\right] = \lim \frac{808.\left(n^2+3n+1\right)}{n^2} = 808.$$