MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG ĐỜI SỐNG

Lê Hồ Quý *(GV trường THPT Duy Tân, Kon Tum)*
Phạm Lê Thành Đạt *(GV trường THPT Lê Lợi, Kon Tum)*

Trong hầu hết các giáo trình cơ bản về giải tích, chúng ta đã biết các ứng dụng của

Các thợ lặn biển sâu nhận thức được rằng áp suất càng tăng khi họ lặn xuống càng sâu. Sở dĩ như thế là vì trọng lượng nước bao quanh họ tăng lên.

Tổng quát, giả sử có một tấm kim loại mỏng, nằm ngang, có diện tích là A (m^2) được nhúng chìm trong một chất lỏng có tỉ trọng ρ (kg/ m^3) sao cho nó nằm cách mặt chất lỏng là d (m) . Khối chất lỏng nằm bên trên tấm kim loại có thể tích là $V = Ad,$ do đó, nó có khối lượng là $m = \rho V = \rho Ad.$ Vì vậy, lực do chất lỏng tác động lên tấm kim loại là

$$F = mg = \rho gAd$$

ở đây, g là gia tốc trọng trường. Áp suất P đặt trên tấm kim loại chính là lực tác động trên một đơn vị diện tích:

$$P = \frac{F}{A} = \rho gd$$

Trong hệ SI, áp suất này có đơn vị là niutơn (N) trên một mét vuông, đơn vị này còn được gọi là một pascal (viết tắt: 1 N/m^2

$$= 1000(9,8)\int_0^{16}(46x - x^2)dx = 9800\left(23x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{16} \approx (4,43).10^7\text{ N.} \ \square$$

2. Khối tâm

Mọi vật trên Trái đất đều chịu tác dụng của trọng lực. Trọng lực của một vật rắn có giá là đường thẳng đứng, hướng xuống dưới và đặt ở một điểm xác định gắn với vật, điểm ấy gọi là tâm của khối (hoặc trọng tâm của vật).

Để xác định khối tâm của vật ta có thể dùng phương pháp hình học đối xứng; hoặc phương pháp chia vật, tuy nhiên với những vật đồng chất, liên tục không thể sử dụng phương pháp chia vật thì ta có thể dùng phương pháp tích phân.

• Trong trường hợp đơn giản, khối tâm của một tấm kim loại mỏng phẳng (hoặc trọng tâm của miền $\Re$) là điểm $(\overline{x}, \overline{y})$, với

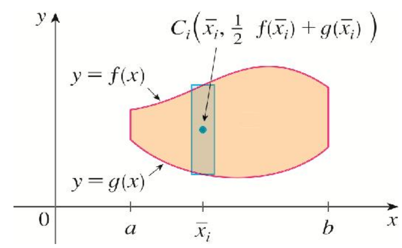
$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx, \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2 dx$$

trong đó A là diện tích của hình.

• Nếu miền $\Re$ nằm giữa hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ở đây $f(x) \ge g(x)$, (Hình 4) thì trọng tâm của $\Re$ là điểm $(\overline{x}, \overline{y})$, với

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx, \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx$$

trong đó A là diện tích của hình.



Hình 4

★Thí dụ 3. Tìm tâm của hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = x$ và parabol $y = x^2$.

Lời giải. Đặt $f(x) = x,\ g(x) = x^2,\ a = 0$ và $b = 1.$ Diện tích của hình phẳng là

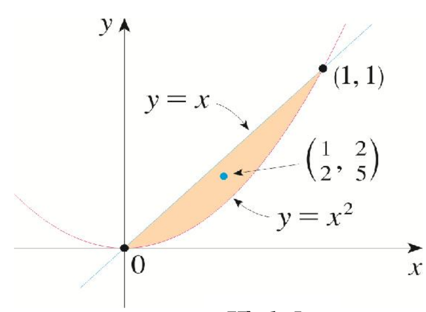
$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Do đó

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = 6\int_0^1 x(x - x^2)dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 \frac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx = = 6\int_0^1 \frac{1}{2}(x^2 - x^4)dx = 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Vậy tọa độ của tâm là $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$ (Hình 5). $\square$



Hình 5

II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG KINH TẾ VÀ SINH HỌC

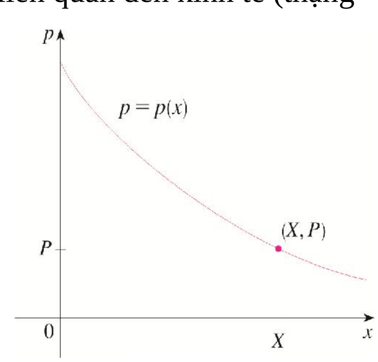
Trong phần này, chúng ta quan tâm đến một số ứng dụng của tích phân liên quan đến kinh tế (thặng dư tiêu dùng) và sinh học (cung lượng tim).

1. Thặng dư tiêu dùng

Giả sử hàm $p(x)$ biểu thị giá mà một công ty đưa ra để bán được x đơn vị hàng hóa. Thông thường, để bán được số lượng hàng hóa lớn thì phải đặt giá thấp, do đó hàm cầu là hàm giảm.

Đồ thị của hàm cầu điển hình-gọi là **đường cầu** thường có dạng cong dốc xuống thể hiện mối quan hệ nghịch biến giữa giá bán và lượng cầu (Hình 7).

Nếu X là lượng hàng hóa hiện có của công ty, thì $P = p(X)$ là giá bán tương ứng mà công ty đặt ra để có thể bán hết X đơn vị hàng hóa đó.



Hình 6

Căn cứ vào mức thỏa mãn của người tiêu dùng đối với sản phẩm, ta chia đoạn $[0;X]$ thành n đoạn con bằng nhau, với độ dài mỗi đoạn là $\Delta x = X/n,$ và chọn $x_i^* = x_i$ là điểm mút bên phải của đoạn con thứ i (Hình 8). Nếu sau khi đã bán đi x_{i-1} đơn vị hàng hóa đầu tiên, chỉ còn số lượng tổng cộng là x_i đơn vị hàng hóa chuẩn bị bán ra, và giá cho mỗi đơn vị hàng hóa là $p(x_i)$ đôla, thì ta có thể bán thêm tối đa Δx đơn vị hàng hóa. Người tiêu dùng thay vì trả $p(x_i)$ đôla, đây là giá cao hơn so với giá trị sản phẩm; họ nghĩ rằng cần phải tính toán để mua chúng với giá thấp, đúng với giá trị hàng hóa. Vì vậy, chỉ việc phải trả P đôla thì lượng tiền mà người tiêu dùng tiết kiệm được là

$$(\text{tiết kiệm trên mỗi đơn vị}).(\text{số đơn vị hàng hóa}) = [p(x_i) - P]\Delta x$$

Xét các nhóm người tiêu dùng có mức giá sẵn lòng trả tương tự nhau cho mỗi đoạn con và cộng tất cả lượng tiền người tiêu dùng tiết kiệm được sau khi n đoạn con hàng hóa được tiêu dùng hết, ta sẽ có được tổng tiết kiệm là

ợố T ho ê ha đ

$$\sum_{i=1}^{n}[p(x_i) - P]\Delta x$$

(Tổng này tương ứng với diện tích của miền gồm các hình chữ nhật ở Hình 8). Nếu ta cho $n \to \infty,$ thì tổng Riemann này dẫn đến tích phân

$$\int_0^X [p(x) - P]dx$$

và trong kinh tế học, ta gọi tích phân đó là **thặng dư tiêu dùng** của hàng hóa.

Thặng dư tiêu dùng biểu diễn lượng tiền ngưS

ổng cdauy ʒ ết sản phẩ về T Ƃ

được bơm bởi tim trong mỗi đơn vị thời gian, có nghĩa là, tốc độ dòng chảy vào động mạch chủ.

Phương pháp pha loãng chất chỉ thị màu được sử dụng để đo cung lượng tim. Chất chỉ thị màu được tiêm vào tâm nhĩ phải và chảy qua tim vào động mạch chủ. Một đầu dò được đặt vào động mạch chủ để đo nồng độ của chất chỉ thị màu để lại trên tim tại những thời điểm cách đều nhau trên một đoạn thời gian $[0,T]$ cho đến khi chất chỉ thị màu đã sạch. Giả sử $c(t)$ là nồng độ của chất chỉ thị màu tại thời điểm t. Nếu ta chia đoạn $[0,T]$ thành các đoạn con bằng nhau với độ dài mỗi đoạn là Δt, khi đó số lượng chất chỉ thị màu chảy qua các điểm thời gian trong mỗi đoạn con từ $t=t_{i-1}$ đến $t=t_i$ là khoảng

$$(\text{nồng độ})(\text{khối lượng}) = c(t_i)(F\Delta t)$$

trong đó F là tốc độ của dòng chảy mà ta cần phải xác định. Như vậy, tổng số lượng chất chỉ thị màu là khoảng

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i)F\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\Delta t$$

và cho $n\to\infty$, ta tìm được số lượng chất chỉ thị màu là

$$A = F\int_0^T c(t)dt$$

Do đó, cung lượng tim được cho bởi công thức

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt}$$

ở đây số lượng chất chỉ thị màu A đã biết và có thể tính gần đúng tích phân của nồng độ đo được.

★**Thí dụ 5.** Một lượng 5 mg chất chỉ thị màu được tiêm vào tâm nhĩ phải. Nồng độ chất chỉ thị màu (trong mg mỗi lít) được đo trong động mạch chủ trong khoảng thời gian 1 giây như trong biểu đồ. Ước tính cung lượng tim.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6.1
1	0.4	7	4.0
2	2.8	8	2.3
3	6.5	9	1.1
4	9.8	10	0
5	8.9		

Lời giải. Ở đây $A=5$, $\Delta t=1$ và $T=10$. Ta sử dụng công thức Simpson để tính gần đúng tích phân của nồng độ:

$$\int_0^{10} c(t)dt \approx \frac{1}{3}[0+4(0.4)+2(2.8)+4(6.5)+2(9.8)+4(8.9)+2(6.1)+4.(4.0)+2(2.3)+4(1.1)+0]$$

$$\approx 41.87$$

Vì vậy, công thức trên cho cung lượng tim là

$$F = \frac{A}{\int_0^{10} c(t)dt} \approx \frac{5}{41.87} \approx 0.12 \text{ L/s} = 7.2 \text{ L/min.} \ ❒$$